Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 145.

In vier Heften.

Berlin,
W. 10, Genthinerstraße 38.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1915.

Ausgabedaten der Hefte von Band 145.

Heft 1/2 ausgegeben am 17. November 1914.

Heft 3 ausgegeben am 10. März 1915.

Heft 4 ausgegeben am 1. Mai 1915.

288029

Über Funktionen, die *Jordan*sche Gebilde darstellen.

Von Herrn *Julius Pál* in Székelyudvarhely.

Einleitung.

1. Es sei $u = F(t)$, $v = G(t)$ eine *Jordan*sche Kurve mit der Umlaufzeit 2π. Das durch diese Kurve begrenzte, endliche, abgeschlossene Gebiet läßt sich nach einem Satze über Ränderzuordnung bei konformer Abbildung umkehrbar eindeutig und stetig und für innere Punkte konform auf die abgeschlossene Kreisfläche $|z| \leq 1$ abbilden*). Es sei $\varphi(z)$ diejenige für $|z| \leq 1$ stetige, für $|z| < 1$ reguläre Funktion, welche diese Abbildung vollzieht. Herr *Fejér* wies nach, daß die Potenzreihe $\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ auch *auf* dem Kreise $|z| = 1$ gleichmäßig konvergiert**).

Man setze $\varphi(e^{i\vartheta}) = \varphi_1(\vartheta) + i\varphi_2(\vartheta)$. Bei passender Wahl der Koordinatenaxen der Kreisebene ist t eine Funktion von ϑ, die von 0 bis 2π wächst, während ϑ dasselbe tut. Diese Funktion $t = m(\vartheta)$ gibt zufolge der Abbildung der Figuren die Identität $F[m(\vartheta)] = \varphi_1(\vartheta)$, und $\varphi_1(\vartheta)$ besitzt**) eine gleichmäßig konvergente *Fourier*sche Reihe.

Mithin gilt der Satz: Ist die nach 2π periodische Funktion $F(t)$ eine *Jordan*sche Komponente, so läßt die Variable t eine umkehrbar eindeutige und stetige Transformation $t = m(\vartheta)$ zu, so daß die transformierte (ebenfalls nach 2π periodische) Funktion $F[m(\vartheta)]$ eine gleichmäßig konvergente *Fourier*sche Reihe besitzt.

---

*) *Carathéodory*, Math. Annal., Bd. 73 (1913), S. 305 ff. Siehe auch *Lindelöf*, Compt. rend. de l'Ac. des scienc., Paris, t. 158 (1914), pg. 245 und *Courant*, dieses Journ., Bd. 144 (1914), S. 190 ff., wo der *Carathéodory*sche Beweis der stetigen Ränderzuordnung bedeutend vereinfacht wurde.

**) *Fejér*, Compt. rend. de l'Ac. des scienc., Paris, t. 156 (1913), pg. 46 ff.

Naturgemäß entstand hiernach die Frage, ob eine solche Transformation für *jede* stetige, nach 2π periodische Funktion möglich ist. Diese Frage wäre gewiß zu bejahen, wenn jede stetige, nach 2π periodische Funktion eine *Jordan*sche Komponente wäre. Indessen ist dem nicht so*). Ist somit der zunächst sich bietende Weg auch verlegt, so kann man doch (durch einen modifizierten Gedankengang) die Existenz der fraglichen monotonen Transformation im wesentlichen nachweisen**).

2. Losgelöst von der Beziehung zur *Fourier*schen Reihe ist die Frage, ob man eine gegebene stetige Funktion als *Jordan*sche Komponente auffassen kann oder nicht, der einfachste Fall aus einer Reihe von Fragen, die der Topologie *Jordan*scher Gebilde angehören***). In dieser Mitteilung sollen diese Fragen, soweit sie die räumliche *Jordan*sche Kurve betreffen, zu einem gewissen Abschluß gebracht werden. In einer weiteren Mitteilung werde ich die analogen Fragen für *Jordan*sche *Flächen* behandeln.

*Jordan*sche Raumkurven.

3. Es seien $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ für alle Werte von t definierte, stetige Funktionen und die Punkte $t = t_1$ und $t = t_2$ der durch sie dargestellten Linie sollen dann und nur dann zusammenfallen, wenn $t_1 \equiv t_2 \pmod{2\pi}$ ist. Die Kurve heißt dann eine *Jordan*sche *Raumkurve mit der Umlaufszeit* 2π. Die Umlaufszeit ist die kleinste gemeinsame (positive) Periode der drei Funktionen. —

4. Aus dem Resultat, das für ebene Kurven entwickelt wurde*), folgt unmittelbar: Ist $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine *ebene Jordan*sche Kurve mit der Umlaufszeit 2π, so ist 2π die kleinste Periode *jeder* der Funktionen φ und ψ. Für Raumkurven gilt der entsprechende Satz nicht. So stellen z. B. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sin 2t$ eine *Jordan*sche Raumkurve mit der Umlaufszeit 2π dar, $z = \sin 2t$ hat aber die Periode π.

Hieran schließt sich gleich die Frage, ob *zwei* der darstellenden Funktionen einer *Jordan*schen Raumkurve eine gemeinsame (positive) Periode haben können, die kleiner als die Umlaufszeit der Kurve ist. Diese Frage ist zu verneinen. Es mögen nämlich φ, ψ, χ eine *Jordan*sche

*) *Pál*, dieses Journ., Bd. 143 (1913), S. 294 ff.

**) *Pál*, Compt. rend. de l'Ac. des scienc., Paris, t. 158 (1914) pg. 101 ff.

***) Allgemein formuliert diese Fragen Herr *Tietze* in seiner dieser Arbeit folgenden Note, S. 9 ff.

Raumkurve mit der Umlaufszeit 2π darstellen. Die kleinste gemeinsame Periode von φ und ψ sei α, welches offenbar die Form $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (n eine positive ganze Zahl) hat. Es ist zu zeigen, daß $n = 1$ ist. Wäre $n > 1$, so wäre, da $\varphi(\alpha) = \varphi(0)$ und $\psi(\alpha) = \psi(0)$ ist, offenbar $\chi(\alpha) + \chi(0)$. Es sei z. B. $\chi(\alpha) - \chi(0) > 0$. Die Differenz $\chi(\alpha + t) - \chi(t)$ dürfte in keinem Punkte $t = t_0$ des Intervalls $(0, \alpha)$ verschwinden, da sonst die Punkte $t = t_0$ und $t = t_0 + \alpha$ der Kurve zusammenfielen. Folglich wäre jene Differenz im ganzen Intervall $0 \leqq t \leqq \alpha$ positiv, wie sie es für $t = 0$ ist, und so wäre $\chi(2\alpha) > \chi(\alpha) > \chi(0)$. Durch Wiederholung des Schlusses erhielte man $\chi(n\alpha) = \chi(2\pi) > \chi(0)$ im Widerspruch mit $\chi(2\pi) = \chi(0)$.

5. Dieses vorausgeschickt, kann man die eigentliche Frage dieser Untersuchung genau formulieren:

*Es seien φ und ψ zwei Funktionen mit der kleinsten gemeinsamen Periode 2π. Gibt es dann eine Ergänzungsfunktion χ so, daß die drei Funktionen eine Jordansche Raumkurve mit der Umlaufszeit 2π ergeben?**)

6. Daß nicht in jedem Fall eine Ergänzungsfunktion existiert, wird schon durch den Spezialfall der ebenen Kurve dargelegt. Es soll nun auch in dem Falle, wo es sich wirklich um Raumkurven handelt, ein Beispiel eines nicht ergänzbaren Funktionenpaares angegeben werden. Man zeichne hierzu einen nur einfache Punkte enthaltenden, offenen Kurvenbogen AB in der (x, y)-Ebene. Ein Punkt soll in den Zeitintervallen $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$, $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ die Bogen AB, BA, AB, BA durchlaufen. Die Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, die diese Bewegung beschreiben, haben gewiß 2π zur kleinsten gemeinsamen Periode. Eine Ergänzungsfunktion existiert nicht. Um dies einzusehen, braucht man nur die Überlegungen, die (Bd. 143 dieses Journals, S. 294—295) für die Ebene angestellt wurden, für den Zylinder, der den Bogen AB vertikal projiziert, wörtlich zu wiederholen.

Aus diesem Beispiel abstrahiert man den allgemeinen Satz: Ist die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ identisch mit einer offenen, nur einfache Punkte enthaltenden Kurve $x = f(\tau)$, $y = g(\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq 1$, so ist τ eine eindeutige, nach 2π periodische Funktion von t, etwa $\tau = F(t)$. In diesem Falle ist eine

---

*) *Eine* Funktion $x = \varphi(t)$ mit der Periode 2π kann immer durch $y = \cos t$, $z = \sin t$ „ergänzt" werden; 2π ist nicht notwendig die kleinste, sondern irgendeine Periode von $\varphi(t)$.

Ergänzungsfunktion dann und nur dann möglich, wenn $F(t)$ genau zwei unabhängige Brückenintervalle (Bd. 143, S. 295) besitzt.

7. Im folgenden wird dieser völlig beherrschte Fall ausgeschlossen. Für die nicht ausgeschlossenen Fälle kann man folgende, sehr weitgehende hinreichende Bedingung für die Existenz einer Ergänzungsfunktion angeben.

Es seien φ, ψ zwei Funktionen mit der kleinsten gemeinsamen Periode 2π. Besitzt die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einen einzigen einfachen Punkt $t = t_0$, d. h. einen solchen, der nur mit den Punkten $t \equiv t_0 \pmod{2\pi}$ zusammenfällt, so existiert eine Ergänzungsfunktion $\chi(t)$.

Beweis: Gewiß darf $t_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Es seien P und Q die Punkte der Kurve $x = \varphi$, $y = \psi$, die den Werten $t = 0$ und $t = \pi$ entsprechen. In der Zeit $(0, \pi)$ werde ich einen Punkt von P nach Q führen *über* der (x, y)-Ebene so, daß seine Bahnkurve nur einfache Punkte besitzt und seine Projektion der Vorschrift $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gemäß sich bewegt. In der Zeit $(\pi, 2\pi)$ führe ich den Punkt *unter* der (x, y)-Ebene in entsprechender Weise von Q nach P zurück. Offenbar genügt es, die erste Hälfte der Bewegung zu beschreiben.

Die Punkte P und Q sind, da P einfacher Punkt der ebenen Kurve ist, voneinander verschieden. Es gibt daher einen Punkt $t = t'$, $0 < t' < \pi$, der sowohl von P als auch von Q verschieden ist. Man nehme alle Werte t, die in das Intervall $(0, \pi)$ fallen und diesen bestimmten Punkt $t = t'$ liefern. Die untere Grenze aller dieser Werte heiße α. Dann ist $\alpha > 0$. Der Punkt $t = 0$ hat vom Bogen $\alpha \leqq t \leqq \pi$ eine von Null verschiedene Entfernung, da er einfacher Punkt der Kurve ist; der Punkt $t = \alpha$ ist, zufolge der Definition von α, ein einfacher Punkt des Bogens $0 \leqq t \leqq \alpha$.

Die Konstruktion von $\chi(t)$ beginne ich damit, daß ich $\chi(t)$ für die Werte $\alpha \leqq t \leqq \pi$ durch die Formel $\chi(t) = \frac{\alpha}{\pi - \alpha}(\pi - t)$ erkläre. Die Funktion $\chi(t)$ nimmt also von α bis 0 ab, während t von α bis π wächst.

Haben die Bogen $0 \leqq t < \alpha$ und $\alpha < t \leqq \pi$ der (ebenen) Kurve keinen gemeinsamen Punkt, so kann man $\chi(t)$ für $0 \leqq t \leqq \alpha$ sofort definieren, z. B. durch $\chi(t) = t$. Haben aber diese Bogen gemeinsame Punkte, so nehme man die Menge T aller Werte t, die den Bedingungen $0 \leqq t < \alpha$ (nicht $0 \leqq t \leqq \alpha$) genügen und deren entsprechende Punkte auch dem Bogen $\alpha < t \leqq \pi$ angehören. Die untere Grenze von T sei u, die obere v.

Offenbar ist $0 \leqq u \leqq v \leqq \alpha$. Der Punkt $t=0$ hat vom Bogen $\alpha \leqq t \leqq \pi$ eine von Null verschiedene Entfernung; deshalb wird ein gewisser Bogen $0 \leqq t \leqq \varepsilon$ mit dem Bogen (α, π) keinen gemeinsamen Punkt haben. Es ist also $u \geqq \varepsilon$ und man hat daher die verschärfte Ungleichung:

$$0 < u \leqq v \leqq \alpha.$$

Der Fall $v < \alpha$ läßt sich leicht erledigen. Alle gemeinsamen Punkte der beiden Bogen $0 \leqq t < \alpha$ und $\alpha \leqq t \leqq \pi$ liegen jetzt auf dem Bogen $0 \leqq t \leqq v$, $v < \alpha$. Der Punkt $t = \alpha$ hat vom Bogen $0 \leqq t \leqq v$ eine von Null verschiedene Entfernung. Daher wird ein gewisser Bogen $\alpha \leqq t \leqq \alpha + \varepsilon_1$ keinen solchen gemeinsamen Punkt enthalten, vielmehr liegen alle diese auf einem Bogen $\alpha + \varepsilon_1 < t \leqq \pi$. Die über dem Bogen $\alpha \leqq t \leqq \pi$ schon konstruierte Raumkurve hat daher über einem beliebigen gemeinsamen Punkt der Bogen $0 \leqq t < \alpha$ und $\alpha < t \leqq \pi$ eine Höhe, die kleiner als $\chi(\alpha + \varepsilon_1)$ ist. Man lasse daher $\chi(t)$ schon in der ungefährlichen Zeit $0 \leqq t \leqq u$ von 0 bis $\chi(\alpha + \varepsilon_1)$ und dann in der Zeit $u \leqq t \leqq \alpha$ von $\chi(\alpha + \varepsilon_1)$ bis α linear anwachsen. Damit ist $\chi(t)$ für $0 \leqq t \leqq \pi$ konstruiert und besteht also in dem betrachteten Falle $v < \alpha$ aus drei linearen Stücken.

Ist $v = \alpha$, so nehme man alle Werte t, die in das Intervall $\alpha < t \leqq \pi$ fallen und gemeinsame Punkte der Bogen $0 \leqq t < \alpha$ und $\alpha < t \leqq \pi$ liefern. Die untere Grenze dieser Werte t sei w. Es ist $w \geqq \alpha$. Hier läßt sich wieder der Fall $w > \alpha$ ohne Schwierigkeit erledigen. Alle gemeinsamen Punkte der oft erwähnten zwei Bogen fallen auf den Bogen $w \leqq t \leqq \pi$, wo $w > \alpha$ ist. Über einem solchen gemeinsamen Punkt hat die für $\alpha \leqq t \leqq \pi$ schon konstruierte Raumkurve eine Höhe, die höchstens gleich $\chi(w)$ ist. Also wähle man ein w_0 zwischen w und α, lasse $\chi(t)$ in der Zeit $0 \leqq t \leqq u$ von Null bis $\chi(w_0)$, in der Zeit $u \leqq t \leqq \alpha$ von $\chi(w_0)$ bis α linear wachsen. Wiederum ließ sich $\chi(t)$ für $0 \leqq t \leqq \pi$ aus drei linearen Stücken zusammenfügen.

Zu erledigen bleibt noch der Fall $v = \alpha = w$.

In diesem Falle wähle man eine monoton wachsende, gegen α konvergierende Folge von Zahlen:

$$u < \alpha^{(1)}, \ \alpha^{(2)}, \ \ldots \ \alpha^{(n)}, \ \ldots \ .$$

Die Werte t, welche gemeinsame Punkte der Bogen $0 \leqq t \leqq \alpha^{(n)}$ und $\alpha \leqq t \leqq \pi$ liefern und welche größer als α sind, sollen die Menge T_n bilden. Die untere Grenze von T_n heiße $w^{(n)}$. Da T_n in T_{n+1} enthalten

ist, ist offenbar $w^{(n+1)} \leqq w^{(n)}$. Daß $w^{(n)} \geqq \alpha$ ist, folgt unmittelbar aus der Definition. Es besteht aber auch die schärfere Ungleichung $w^{(n)} > \alpha$. Der Punkt $t = \alpha$ hat nämlich vom Bogen $0 \leqq t \leqq \alpha^{(n)}$ eine von Null verschiedene Entfernung. Daher wird ein gewisses Intervall $\alpha \leqq t \leqq \alpha + \varepsilon_n$ keinen Punkt von T_n enthalten, so daß $w^{(n)} \geqq \alpha + \varepsilon_n$ ist. Endlich ist $\lim_{n=\infty} w^{(n)} = \alpha$, da in einem beliebigen Intervall $\alpha \leqq t \leqq \alpha + \varepsilon$ (zufolge der Gleichung $w = \alpha$) Punkte liegen, die einer der Mengen T_n angehören. Aus den angeführten Eigenschaften der Zahlen $w^{(1)}, w^{(2)}, \ldots$ folgt, daß man aus ihnen eine *effektiv abnehmende* Teilfolge $w_1 > w_2 > w_3 > \cdots$ auswählen kann, die gegen α konvergiert: $\lim_{n=\infty} w_n = \alpha$. Ist $w_n = w^{(N)}$, so soll $\alpha^{(N)} = \alpha_n$ gesetzt werden. Die Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und $w_1, w_2, \ldots$ haben dann folgende Eigenschaften: Es ist $\alpha_1 > u$. Die α_n nehmen (effektiv) monoton gegen α zu, die w_n nehmen (effektiv) monoton gegen α ab. Die gemeinsamen Punkte der Bogen $0 \leqq t \leqq \alpha_n$ und $\alpha \leqq t \leqq \pi$ fallen auf den Bogen $w_n \leqq t \leqq \pi$.

Nehmen wir einen gemeinsamen Punkt der abgeschlossenen Bogen $(0, \alpha_n)$ und (α, π). Die Höhe der für $\alpha \leqq t \leqq \pi$ schon konstruierten Raumkurve über diesem Punkt ist $\leqq \chi(w_n) < \chi(w_{n+1})$.

Daher kann man $\chi(t)$ in der Zeit $0 \leqq t \leqq \alpha$, ohne irgendwelche Kollisionen befürchten zu müssen, wie folgt definieren: In der Zeit $0 \leqq t \leqq u$ soll $\chi(t)$ von Null bis $\chi(w_2)$, in der Zeit $u \leqq t \leqq \alpha_1$ von $\chi(w_2)$ bis $\chi(w_3)$, in der Zeit $\alpha_n \leqq t \leqq \alpha_{n+1}$ von $\chi(w_{n+2})$ bis $\chi(w_{n+3})$ linear zunehmen.

Ist also $v = \alpha = w$, so ist $\chi(t)$ für $0 \leqq t \leqq \pi$ aus einer abzählbar unendlichen Folge linearer Stücke zusammengesetzt.

Hiermit ist die Existenz von $\chi(t)$ für alle möglichen Fälle der gemachten Voraussetzung erwiesen.

8. Der Satz soll jetzt auf ein instruktives Beispiel angewandt werden.

Man nehme ein Quadrat $ABCD$, welches eine *Hilbert-Peano*sche Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leqq t \leqq \pi$ bildet. Zur Zeit $t = 0$ sei der bewegte Punkt in A, zur Zeit $t = \pi$ in D. Diese offene Kurve ist gewiß die Projektion einer offenen, nur einfache Punkte enthaltenden Raumkurve. (Man wähle z. B. als dritte Funktion $z = t$.) — Jetzt aber soll ein Punkt in der Zeit $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ die Schlußseite des Quadrates beschreiben; man erhält so eine geschlossene ebene Kurve. Diese ist, da die *Hilbert-Peano*-

sche Kurve einfache Punkte besitzt, die Projektion einer (geschlossenen) *Jordan*schen Raumkurve.

9. Die angegebene hinreichende Bedingung (die Existenz eines einfachen Punktes) ist im übrigen keine notwendige. Man betrachte z. B. einen Bogen einer gemeinen Schraubenlinie, der zumindest einer Umkreisung der Schraubenachse entspricht. Verschiebt man diesen Bogen in der Achsenrichtung um ein hinreichend kleines Stück, so wird das gestreifte Gebiet von einer *Jordan*schen Kurve begrenzt, deren Projektion auf eine zur Achse senkrechte Ebene nur mehrfache Punkte hat.

10. Wen man genau abwägt, in welcher Weise die Existenz eines einfachen Punktes in dem obigen Beweise in Anspruch genommen wurde, so kommt man zu einer hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Ergänzungsfunktion, welche *weniger* postuliert, als die Existenz eines einfachen Punktes.

Es seien gegeben die Funktionen φ und ψ mit der kleinsten gemeinsamen Periode 2π. *Für die Existenz einer Ergänzungsfunktion ist es hinreichend, daß es drei Werte:* $a < b < c < a + 2\pi$ *geben soll mit folgenden Eigenschaften:*

1. *der Punkt* $t = a$ *der Kurve* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *hat eine von Null verschiedene Entfernung vom Bogen* $b \leqq t \leqq c$ *der Kurve;*

2. *der Punkt* $t = b$ *ist ein einfacher Punkt des Bogens* $a \leqq t \leqq b$ *und der Punkt* $t = c$ *ein einfacher Punkt des Bogens* $c \leqq t \leqq a + 2\pi$.

Auf Grund der Voraussetzung, daß a, b, c diese Eigenschaften besitzen, läßt sich nämlich der obige Beweis Wort für Wort wiederholen.

Diese Voraussetzung postuliert aber in der Tat weniger, als die Existenz eines einfachen Punktes. Es ist evident, daß sie erfüllt ist, wenn ein einfacher Punkt vorhanden ist; sie kann aber auch erfüllt sein, ohne daß ein einfacher Punkt existiert. Wickelt man z. B. die nebenstehende Figur 1 auf den Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ auf, so daß die Grenzgeraden Erzeugende des Zylinders werden, und läßt man dann einen Punkt die aufgewickelte Figur so durchlaufen, wie es die Pfeile und Zeitangaben andeuten, so wird für

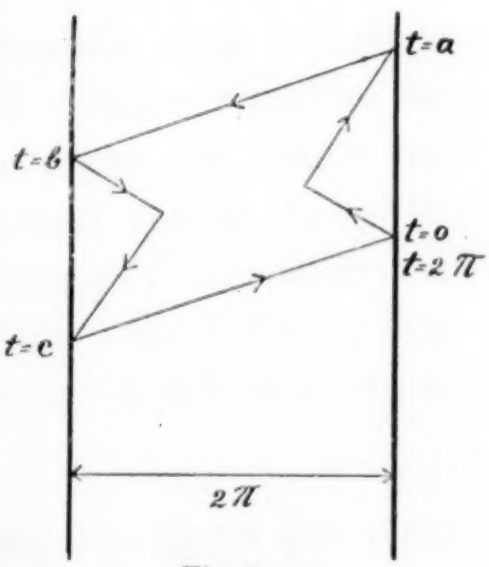


Fig. 1.

die (x, y)-Projektion der Bahnkurve die (a, b, c)-Bedingung erfüllt sein, obzwar jeder Punkt dieser Projektion ein mehrfacher ist.

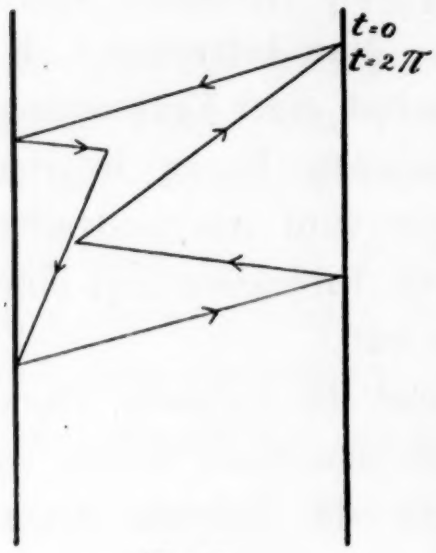


Fig. 2.

11. Auch diese Bedingung ist keine notwendige; durch Aufwickelung der Fig. 2 erhält man eine *Jordan*sche Raumkurve, auf deren (x, y)-Projektion keine drei Punkte die a, b, c-Bedingung erfüllen.

Die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Existenz einer Ergänzungsfunktion scheint mir (da so wenig postulierende hinreichende Bedingungen noch immer nicht notwendig sind) nicht unwesentliche Schwierigkeiten zu verursachen. —

An dieser Stelle möchte ich auch ein leichtes Versehen in meiner Arbeit in Bd. 143 dieses Journ. (auf welches mich auch Herr *Tietze* in freundlicher Weise aufmerksam machte) rektifizieren. Daselbst steht S. 298 die Gleichung $\lim_{n=\infty} h_n = r$, die durch $\lim_{n=\infty} h_n \leqq r$ zu ersetzen ist. Der Fall $\lim_{n=\infty} h_n < r$ macht jedoch keinerlei Schwierigkeiten, da man in diesem Fall den bewegten Punkt in der Zeit $r \leqq t \leqq r_0$ im gefahrlosen Streifen $\lim_{n=\infty} h_n \leqq y \leqq r$ bergab führen kann.

Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.

Von Herrn *Heinrich Tietze* in Brünn.

Die Beschäftigung mit dem hier behandelten Gegenstand nahm von einer *Carathéodory-Fejér*schen Frage über ebene *Jordan*sche Kurven und verwandten topologischen Fragen ihren Ausgang*). Ein dabei verwendeter Satz über gewisse unstetige Funktionen einer Veränderlichen läßt sich aber auf Funktionen irgendeines Gebietes des n-dimensionalen Raumes, noch allgemeiner einer *Fréchet*schen „Klasse E“ ausdehnen (Satz 1). Nach einem einfachen Beweis für den speziellen Fall des R_n wird der allgemeinere für beliebige Klassen E mitgeteilt.

Durch Herrn *H. Hahn*, dem ich den letztgenannten Beweis mitteilte, wurde ich auf die Verwandtschaft dieses Satzes mit den folgenden beiden Fragen hingewiesen: erstens die Frage der Ergänzbarkeit einer auf einer abgeschlossenen Menge in einer Klasse E definierten stetigen Funktion zu einer in ganz E definierten stetigen Funktion; zweitens die Frage der Ausdehnung vom R_n auf beliebige Klassen E des Satzes von *R. Baire***), daß jede oberhalb halbstetige Funktion sich als Grenze einer monoton abnehmenden Folge stetiger Funktionen darstellen läßt. Es ließ sich nun in der Tat die Beweismethode des Satzes 1 leicht zur Erledigung dieser Fragen benützen (Satz 2 und 3).

*) s. die folgende Note: „Bemerkungen zu den Sätzen von *J. Pál* über ebene und räumliche *Jordan*sche Kurven“.

**) „Sur les séries à termes continues et tous de même signe“, Bulletin de la Soc. math. de France, t. 32 (1904), p. 125.

1. Wir betrachten (im allgemeinen unstetige) Funktionen $f(X)$, die in den Punkten X einer Menge M des R_n definiert sind, und beweisen den

Satz 1: *Zu jeder in der Menge M definierten, beschränkten und bezüglich M in allen Punkten der abgeschlossenen Teilmenge T von M stetigen Funktion $f(X)$ gibt es eine auf M stetige Funktion $F(X)$, die in T mit $f(X)$ übereinstimmt und sonst durchwegs $> f(X)$ ist*).*

Von Interesse ist derjenige Spezialfall für die Voraussetzungen dieses Satzes, in dem $f(X)$ eine beschränkte Funktion eines n-dimensionalen Gebietes G ist, die an der Grenze T des Gebietes stetig ist ($M = G + T$).

Beweis: Man teile den R_n in n-dimensionale Einheitskuben und jeden derselben in immer kleinere Kuben durch fortgesetzte Halbierung der Seitenlänge. Wir betrachten dann alle Kuben K_1 der Seitenlänge 1, die im Inneren oder am Rand Punkte von $M - T$, jedoch keinen Punkt von T enthalten, dann für $\nu > 1$ alle Kuben K_ν der Seitenlänge $\frac{1}{2^{\nu-1}}$, die nicht Teile von Kuben $K_1, K_2, \ldots K_{\nu-1}$ sind und im Inneren oder am Rand Punkte von $M - T$, jedoch keinen Punkt von T enthalten. ν heiße der Index von K_ν, und $\mathfrak{M}[f, K_\nu]$ bezeichne den größten Wert, den die Funktion $f(X)$ im Inneren oder am Rand von K_ν erreicht, oder dem sie beliebig nahekommt**). Sei B ein Eckpunkt eines K_a; wir betrachten alle Kuben K_ν, denen B als Randpunkt angehört, bezeichnen mit $\nu(B)$ und $\psi(B)$ den größten Wert des Index, bzw. das größte $\mathfrak{M}[f, K_\nu]$ für diese Kuben. Dann sei

$$F(B) = \psi(B) + \delta_{\nu(B)},$$

unter $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$ positive Zahlen mit $\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0$ verstanden.

*) Sei bemerkt, daß der folgende Beweis auch den Fall miterledigt, daß $f(X)$ nur innerhalb jedes endlichen Teiles des R_n beschränkt (bzw. *unter* einer Schranke gelegen) ist. Aber auch für im Endlichen nicht nach oben beschränkte $f(X)$ gilt der Satz, wobei der Beweis nur so abzuändern ist, daß bei der Konstruktion der K_ν jene Punkte X zu T hinzuzunehmen sind, für die $\overline{\lim_{Y=X}} f(Y) = +\infty$ ist. Für diese Punkte bleibt natürlich $F(X)$ undefiniert. — [Die folgenden Konstruktionen haben eine gewisse Ähnlichkeit mit solchen bei *R. Baire*, Bull. d. l. Soc. math. d. Fr., t. 28, p. 173 ff. — Zusatz bei d. Korrektur.]

**) d. i. also die „obere Grenze“ (borne supérieure) der Werte von f auf K_ν in der Terminologie der Enzyklopädie I A 3, Nr. 16; II A 1, Nr. 6 (Enc., éd. franç., I 3, Nr. 20; II 1, Nr. 6), beziehungsweise das „Maximum“ von f in K_ν in der Bezeichnungsweise von *R. Baire*; vgl., auch bezüglich des verwendeten Symbols, Annali di Mat., ser. III, T. III (1899), p. 5; Encyclopédie, éd. franç., II 2, Nr. 22.

Weiter sind die zur Grenze jedes Kubus K_ν gehörenden τ-dimensionalen Kuben zu betrachten ($1 \leqq \tau \leqq n-1$), also für $\tau = 1$ seine Kanten, für $\tau = 2$ die Quadrate seiner Begrenzung usw. Ein τ-dimensionaler Randkubus R eines K_a heiße ein elementarer, wenn er jedem Kubus K_ν, auf dem innere Punkte von R liegen, ganz angehört (sei es als Randkubus, sei es als Teil eines solchen). Jeder τ-dimensionale Randkubus eines K_a zerfällt in eine endliche Anzahl elementarer Randkuben. Wir nehmen nun an, für die Punkte der elementaren $(\tau-1)$-dimensionalen Randkuben sei $F(X)$ bereits definiert, und wollen $F(X)$ nun für die Punkte eines beliebigen elementaren τ-dimensionalen Randkubus R definieren. Wir benützen, daß F nach Voraussetzung für jeden Randpunkt von R definiert ist; (diese Voraussetzung ist für $\tau = 1$ erfüllt, denn in diesem Falle, wo R eine elementare Kante ist, besteht der Rand von R aus zwei Punkten B). Sei dann a das Maximum, b das Minimum von $F(X)$ auf dem Rand von R, c irgendein Wert zwischen a und b (nur für $a = b$ wäre $c = a$ zu setzen) und C irgendein Punkt im Inneren von R, so werde $F(C) = c$ gesetzt und $F(X)$ auf jedem Radiusvektor von C zu einem Randpunkt von R als lineare Funktion der Entfernung von C angenommen. Dieses Verfahren liefert $F(X)$ für alle elementaren Randkuben der K_ν und schließlich, für $\tau = n$ angewendet, auch für alle Punkte X der K_ν selbst. Es ist leicht zu sehen, daß die hiermit für alle Punkte P von $M - T$ definierte Funktion $F(P)$ stetig und in $M - T$ größer als $f(P)$ ist, ferner, daß für jeden Punkt Q von T, der Häufungspunkt von $M - T$ ist, auch $F(Q) = \lim_{P=Q} F(P)$ existiert und gleich $f(Q)$ ist.

Für $\tau = 1$, das ist für die elementaren Kanten, ließe sich die Definition von $F(X)$ noch dadurch vereinfachen, daß man $F(X)$ zwischen den beiden Randpunkten B der Kante einfach linear nimmt. Ist speziell $n = 1$ und besteht $M - T$ aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Intervallen $m < x < m_1$, so braucht man in jedem Intervall an Stelle der Punkte B nur überhaupt irgendeine Punktmenge des Intervalls zu wählen, die $x = m$ und $x = m_1$ als einzige Häufungsstellen hat*).

2. Wir wollen nun beweisen, daß Satz 1 nicht nur gilt, wenn die Grundmenge, der die Mengen M, T entnommen sind, der R_n ist, sondern

*) Bereits *J. Pál* verwendet derartige Konstruktionen in seiner der eingangs erwähnten topologischen Frage gewidmeten Arbeit, dieses Journal, Bd. 143, S. 294.

irgendeine *Fréchet*sche Klasse E, das heißt*) eine Gesamtheit von Elementen („Punkten"), so daß für je zwei von ihnen, A, B, eine Definition des Abstandes (écart) (A, B) vorliegt, die den Forderungen

$$(A, A) = 0,\ (A, B) = (B, A) > 0 \text{ für } A \neq B,\ (A, B) \leqq (A, C) + (C, B)$$

genügt.

Sei vorweg bemerkt, daß der allgemeine Fall des Satzes 1 durch Addition einer Konstanten zu f auf den speziellen zurückgeführt werden kann, daß die Werte f alle über einer positiven Schranke λ liegen. Mit P werden im folgenden die Punkte von $M - T$, mit Q jene von T bezeichnet. Es bezeichne ferner**) $\varrho(X, T)$ den Abstand eines Punktes X von T. Für jeden Punkt P definieren wir $g(P)$ als das Maximum $\mathfrak{M}\left[\frac{f(X)}{(1+(X,P))^{\sigma}}, M\right]$, das ist den größten Wert, den der Ausdruck

$$(1.) \qquad \frac{f(X)}{(1+(X,P))^{\sigma}} \qquad \left(\sigma = \sigma(P) = \frac{1}{\varrho(P,T)}\right)$$

in den Punkten X von M erreicht oder beliebig approximiert; dieselbe Definition nehmen wir für $g(Q)$, das heißt, da dann $\sigma = \infty$ wird, $g(Q) = f(Q)$. Man sieht, daß $g(P) \geqq f(P)$ ist, indem man $X = P$ setzt. Daß ferner g in jedem Punkt P stetig ist, folgt aus der Stetigkeit von (X, P) und $\sigma(P)$ und damit des Ausdruckes (1.) als Funktion von P. Zum Beweis der Stetigkeit von g in einem Punkt Q werde um Q eine Umgebung***) U so abgegrenzt, daß f in U zwischen $f(Q) - \varepsilon$ und $f(Q) + \varepsilon$ liegt $\left(0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{2}\right)$. In U wählen wir eine engere Umgebung U_1 von Q, so daß für alle in U_1 liegenden Punkte P und außerhalb U liegenden Punkte X der Abstand (X, P) über einer positiven Schranke, sie heiße ϑ, liegt. In U_1 wählen wir eine engere Umgebung U_2, so daß $\sigma = \sigma(P)$ für alle Punkte P von U_2 der Bedingung genügt: $(1+\vartheta)^{\sigma} > \frac{2\mu}{f(Q)}$ [μ eine obere Schranke von $f(X)$]. Für alle P in U_2 und X außerhalb U ist dann

$$\frac{f(X)}{(1+(X,P))^{\sigma}} < \frac{\mu}{(1+\vartheta)^{\sigma}} < \frac{f(Q)}{2} < f(Q) - \frac{\lambda}{2} < f(Q) - \varepsilon.$$

---

*) s. *M. Fréchet*, „Sur quelques points du calcul fonctionnel", Par. Thèse = Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 22 (1906), pp. 1—74, Nr. 49.

**) Konform mit *A. Schoenflies*, Bericht II., Jahresber. der Deutsch. Math. Ver., Ergänzungsband 2, S. 102. Ein Punkt Q mit $(X, Q) = \varrho(X, T)$ muß nicht existieren.

***) Gesamtheit aller Elemente, deren Abstand von Q unter einer positiven Zahl liegt.

Wenn P in U_2 ist, kommen also für das Maximum von (1.) nur Punkte X, die in U liegen, in Frage und es ist dann $f(Q)-\varepsilon<f(P)\leqq g(P)<f(Q)+\varepsilon$, somit $\lim\limits_{P=Q} g(P)=f(Q)=g(Q)$, wie verlangt.

Bedeutet dann γ eine übrigens beliebig kleine positive Zahl, so leistet die durch $F(X)=g(X)+\gamma\cdot\varrho(X,T)$ definierte Funktion alles Verlangte*).

Zusatz. Wenn die Funktion $f(X)$ des Satzes 1 für alle Punkte P von $M-T$ den Ungleichungen $f(P)<C$, $\overline{\lim\limits_{X=P}} f(X)<C$ genügt, so kann auch $F(X)$ der Ungleichung $F(P)<C$ entsprechend bestimmt werden.

In der Tat ist dann $g_1(P)<C$, und man braucht nur zu setzen: $F(P)=g_1(P)+$ der kleineren der Größen $\gamma\cdot\varrho(P,T)$ und $\frac{1}{2}(C-g_1(P))$.

3. Im Anschluß an den vorstehenden Beweis ergibt sich unmittelbar ein Beweis für den folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung eines von *R. Baire* (l. c.) für den R_n als Grundmenge bewiesenen Satzes darstellt:

Satz 2: *Sei eine auf der Menge M (in einer Fréchetschen Klasse E) definierte Funktion $f(X)$ beschränkt und oberhalb halbstetig, so daß für alle X von M gilt:*

$$\overline{\lim_{Y=X}} f(Y)\leqq f(X); \tag{2.}$$

*sei ferner $f(X)$ bezüglich M auf der abgeschlossenen Teilmenge T von M stetig. Dann gibt es eine Folge von auf M stetigen Funktionen $F_1(X)$, $F_2(X),\dots F_\nu(X),\dots$, die den Bedingungen genügt**):*

$$F_{\nu+1}(P)<F_\nu(P) \text{ für alle Elemente } P \text{ von } M-T, \quad (\nu\geqq 1)$$
$$F_\nu(Q)=f(Q) \text{ für alle Elemente } Q \text{ von } T, \quad (\nu\geqq 1)$$
$$\lim_{\nu=\infty} F_\nu(X)=f(X) \text{ für alle Elemente } X \text{ von } M.$$

Den Fall, daß T die Nullmenge ist, d. h. gar kein Element enthält (vgl. unten den „Zusatz"), schließen wir zunächst aus. $\gamma_1,\gamma_2,\dots\gamma_\nu,\dots$

---

*) Im vorstehenden kann man statt $g(X)$ auch die Funktion $g_1(X)$ verwenden, die man erhält, wenn man nicht, wie bei der Definition von $g(P)$, in (1.) X *alle* Punkte von M durchlaufen läßt, sondern nur jene, die Punkte von $M-T$ oder Häufungspunkte von $M-T$ sind.

**) Daß umgekehrt die Existenz einer konvergenten Folge stetiger $F_\nu(X)$ mit den angeschriebenen Eigenschaften stets eine oberhalb halbstetige Funktion $f(X)$ zur Grenze hat, folgt ganz ebenso wie bei *R. Baire*, Bull. d. l. Soc. math. d. Fr., l. c., § 2, im Falle von linearen Mengen, bezw. solchen des R_n.

sei eine Folge abnehmender positiver Zahlen mit $\lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu = 0$. So wie wir zur Funktion $f(X)$ in Nr. 2 die Funktion $g(X)$ definiert haben, werde nun etwas allgemeiner die Funktion $g_\nu(X)$ definiert, indem wir für $\sigma = \sigma(P)$ nicht $\frac{1}{\varrho(P,T)}$, sondern $\frac{1}{\gamma_\nu \cdot \varrho(P,T)}$ nehmen. Die wesentlichen Eigenschaften von $g(X)$ bleiben dadurch für $g_\nu(X)$ erhalten: $g_\nu(X)$ ist stetig, und es ist $g_\nu(P) \geqq f(P)$, $g_\nu(Q) = f(Q)$. Ferner ist $g_{\nu+1}(P) \leqq g_\nu(P)$ und $\lim_{\nu=\infty} g_\nu(P)$ gleich der größeren der Zahlen $f(P)$ und $\overline{\lim_{Y=P}} f(Y)$, also wegen (2.) gleich $f(P)$. Die Funktionen $F_\nu(X) = g_\nu(X) + \gamma_\nu \cdot \varrho(X,T)$ genügen dann allen verlangten Bedingungen.

Zusatz. Satz 2 gilt auch noch, wenn man für T die Nullmenge nimmt und dementsprechend

$$F_{\nu+1}(X) < F_\nu(X) \text{ für alle Elemente } X \text{ von } M \ (\nu \geqq 1)$$

verlangt.

Im Beweis für Satz 2 ist dann nur $\varrho(X,T)$ allenthalben durch eine Konstante, z. B. $= 1$, zu ersetzen.

4. In derselben Art hergestellte Funktionen ergeben auch einen Beweis von

Satz 3. *Eine auf einer abgeschlossenen Menge T einer Fréchetschen Klasse E definierte, beschränkte und stetige Funktion $f(Q)$ läßt sich zu einer in allen Elementen X von E definierten und stetigen Funktion ergänzen.*

In der Tat braucht man für ein nicht zu T gehöriges X nur $f(X)$ gleich dem Maximum von $\frac{f(Q)}{(1+(Q,X)^2)^\sigma}$ für alle Elemente Q von T zu setzen, wo $\sigma = \frac{1}{\varrho(X,T)}$ und $\varrho(X,T)$ gleich dem Abstand des Elementes X von T ist*).

*) Man erhält Satz 3 natürlich auch aus Satz 1, sobald man $f(Q)$ zu einer den Voraussetzungen von Satz 1 genügenden Funktion $f(X)$ ergänzt. Eine solche — speziell oberhalb halbstetige — Funktion erhält man, indem man $f(X)$ definiert als den größten Wert, den $f(Q)$ erreicht oder beliebig approximiert in Punkten Q, für die $(X,Q) < \varrho(X,T) + \varepsilon$ ist bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$.

Bemerkungen zu den Sätzen von *J. Pál* über ebene und räumliche *Jordan*sche Kurven.

(Zum Teil*) aus brieflichen Mitteilungen an Herrn *G. Pólya*.)

Von Herrn *Heinrich Tietze* in Brünn.

---

1. Gelegentlich des Wiener Naturforscher- und Ärztetages im vergangenen Herbst erzählten Sie mir von einem von *Fejér* gestellten Problem nach etwaigen Bedingungen, denen die bei ebenen geschlossenen *Jordan*schen Kurven $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ auftretenden Funktionen $\varphi(t)$ genügen müssen. Die Lösung, die ich Ihnen damals mitteilte, unterscheidet sich natürlich nur in der Formulierung von der inzwischen von Herrn *Pál* veröffentlichten**), und der Beweis, den ich mir dafür zurechtgelegt hatte (s. unten Nr. 2), benutzt einen allgemeinen und verallgemeinerungsfähigen Hilfssatz***), der in dem verwendeten eindimensionalen Fall mit gewissen Überlegungen von *Pál* enge verwandt ist.

Von Interesse ist wohl, daß das genannte Problem nach der Verteilung der Abszissenwerte auf ebenen *Jordan*schen Kurven ein spezielles Beispiel einer sehr ausgedehnten Klasse von bisher, wie es scheint, nicht behandelten situs-analytischen Fragen darstellt, von denen einige, wie Sie mir schreiben, von Herrn *Pál* bereits gestellt und mit Erfolg in Angriff genommen sind†):

---

*) Nr. 1 und 2 dieser Note.

**) In der Arbeit: „Über die Existenz einer *Jordan*schen Kurve $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ bei vorgeschriebenem $\varphi(t)$", dieses Journal, Bd. 143, S. 294 (im folgenden als „*Pál*, I" zitiert).

***) Vgl. die vorhergehende Note: „Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind."

†) Vgl. die diesen Noten vorangehende Arbeit von *Pál:* Über Funktionen, die *Jordan*sche Gebilde darstellen" (im folgenden als „*Pál*, II" zitiert).

(A) Die Frage nach der Verteilung der x-y-Wertepaare auf einer geschlossenen *Jordan*schen (stetigen doppelpunktlosen) Kurve des R_3;

(B) jene nach der Verteilung der x-Werte auf einer im R_3 gelegenen *Jordan*schen Fläche (umkehrbar eindeutigem und stetigem Abbild der Kugelfläche).

Ein weiteres Beispiel wäre:

(C) die Frage nach der Verteilung der x-y-Wertepaare auf einer *Jordan*schen Fläche des R_3.

Die Klasse dieser Fragen hat den Typus: Ausgegangen wird von einer Punktmenge $\mathfrak{M}^0$ (Kreislinie, Kugelfläche). Man betrachtet die ihr topologisch gleichwertigen, d. i. umkehrbar eindeutig und stetig auf sie abbildbaren Mengen $\mathfrak{M}$ in einem bestimmten R_n, charakterisiert durch ein *geeignetes* System von n Funktionen $x_\nu = \varphi_\nu(P^0)$, unter P^0 einen Punkt der Ausgangsmenge verstanden. Welchen Bedingungen genügt ein Teil dieser n Funktionen, zum Beispiel m von ihnen? Das heißt, wenn die Projektion $\mathfrak{M}'$ einer solchen $\mathfrak{M}$ auf einen linearen m-dimensionalen Raum betrachtet wird, von welcher Art ist die eindeutige stetige (aber im allgemeinen nicht mehr eindeutig umkehrbare) Abbildung von $\mathfrak{M}^0$ auf $\mathfrak{M}'$*)?

Daß die Frage (C) durch die Erledigung von (B) nicht miterledigt ist, zeigt z. B. die folgende unzulässige x-y-Werteverteilung auf der Kugelfläche $\mathfrak{M}^0$, bei der die x-Verteilung ebenso wie die y-Verteilung jede für sich genommen offenbar zulässig (im Sinne der Frage (B)) ist: Sei $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ die Kugel $\mathfrak{M}^0$, so werde $x=\xi$, $y=\xi$ genommen**).

---

*) Bei hinlänglich großem $n-m$ sind natürlich außer der Stetigkeit gar keine Bedingungen vorhanden. Vgl. *Pál*, II, Nr. 5, Anm.*).

**) Im Anschluß an Problem (B) selbst noch eine Bemerkung: Herr *Pál* ist, wie ich von Ihnen und ihm selbst erfahre, bereits vor längerer Zeit zu folgender *notwendigen und hinreichenden* Bedingung für (B) gelangt: (a) Existenz einer *Jordan*schen Kurve auf der Kugelfläche $\mathfrak{M}^0$ (bezw. auf der *Jordan*schen Fläche $\mathfrak{M}$ selbst) die die Stellen P^0, wo $x=\varphi_1(P^0)$ seinen maximalen Wert M annimmt, trennt von den Stellen minimalen Wertes m. Ich hatte Ihnen vermutungsweise die gleiche Bedingung geschrieben, zugleich die folgende wohl unschwer als gleichwertig erkennbare: (b) Von den zusammenhängenden Gebieten, in die $\mathfrak{M}^0$ durch die Menge aller M-Stellen von $\varphi_1(P^0)$ zerfällt, enthält ein einziges alle m-Stellen (und umgekehrt). Stellt man nun das nächsthöhere Problem nach der x-Verteilung auf im R_4 gelegenen Abbildern der dreidimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit S_3: $\xi^2+\eta^2+\zeta^2+v^2=1$, so sind die zu (a) und (b) analogen Bedingungen *nicht* gleichwertig; ist hier eine x-Wertever-

Weitere spezielle Fragen erhält man, wenn man an Stelle der Kugelfläche in den vorgenannten Fragen (B), (C) Flächen höheren Zusammenhangs für $\mathfrak{M}^0$ wählt. Hierher gehört denn auch, daß, wenn man eine geschlossene einseitige*) Fläche als Ausgangsgebilde wählt, es dazu im R_3 überhaupt kein doppelpunktfreies Abbild gibt. In der obengenannten Klasse von Fragen ist überhaupt die von mir gelegentlich**) genannte Frage als Spezialfall mitenthalten: Welches ist die kleinste Anzahl n von Dimensionen, so daß ein ebener R_n ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild einer vorgegebenen l-dimensionalen Mannigfaltigkeit enthält? Es ist ja durchaus nicht ausgemacht, daß zu jeder l-dimensionalen orientierbaren (s. unten Anm. *)) Mannigfaltigkeit ein derartiges Abbild im R_{l+1} existiert, allemal, auch wenn $l > 2$, zum Beispiel $= 3$ ist.

2. Eine ebene *Jordan*sche Kurve erhält man, indem man für die Punkte t einer Kreislinie zwei stetige Funktionen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ so angibt, daß verschiedenen Punkten t stets verschiedene Wertepaare x, y entsprechen. Der Satz von *Pál* über ebene *Jordan*sche Kurven lautet dann in der Formulierung, die ich Ihnen in Wien mitteilte, und die, wie Sie mir schreiben, auch Herrn *Pál* bekannt war:

Damit es zu einer gegebenen stetigen Funktion $x = \varphi(t)$ eine auf eine Jordansche Kurve führende „Ergänzungsfunktion“ $y = \psi(t)$ gebe, ist notwendig und hinreichend, daß die Maxima und die Minima der Funktion $\varphi(t)$ auf der Kreislinie einander nicht trennen.

Daß die Bedingung notwendig ist, zeigen am einfachsten die schon von *Pál* in I, § II mitgeteilten Überlegungen. Für den Beweis des Hinreichens verwenden wir den in Satz 1 der vorhergehenden Note als Spezialfall enthaltenen

---

teilung im Raum S_3 zulässig, bei der die M-Stellen und m-Stellen je eine Kreislinie bilden, die einander wie zwei aufeinanderfolgende Glieder einer Kette durchsetzen? (b) wäre erfüllt, während es keine *sphärische* Fläche (aber allerdings Flächen höheren Zusammenhangs) in S_3 gäbe, die die M- und m-Stellen trennt.

*) Das Wort im absoluten Sinne gemeint; mit Rücksicht auf die Einwendungen gegen diesen Sprachgebrauch (s. *E. Steinitz*, Sitzungsber. Berlin. Math. Ges. 7 [Arch. d. Math. u. Phys. (3) 13] wäre vielleicht der Ausdruck „*nicht orientierbar*“ besser — ebenso „*orientierbar*“ statt „zweiseitig“ — ohne so umständlich zu sein wie „mit umkehrbarer Indikatrix“ — bezw. „mit nicht umkehrbarer Indikatrix“.

**) Monatshefte f. Math. u. Phys. 19 (1908): „Über die topologischen Invarianten etc.“, § 2, Anm. 13; auch § 16, Anm. 8.

Hilfssatz: Wenn die im Intervall $a < x < b$ definierte Funktion $f(x)$ unter einer oberen Schranke gelegen und $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x=b} f(x) = B$ ist, so gibt es eine stetige die Bedingungen $F(x) > f(x)$ für $a < x < b$, $F(a) = A$, $F(b) = B$ erfüllende Funktion.

Seien nun m und M Minimal- und Maximalwert von $\varphi(t)$ und t_1, t_2 jene der vorausgesetzten Bedingung gemäß vorhandenen Punkte der Kreislinie, so beschaffen, daß $\varphi(t_1) = m$, $\varphi(t_2) = M$ ist und daß man bei Durchlaufen des Kreises in positiver Richtung von t_1 nach t_2 nur Werte $\varphi(t) > m$, bei Durchlaufen in positiver Richtung von t_2 nach t_1 nur Werte $\varphi(t) < M$ antrifft. Für den Bereich (Kreisbogen) $\mathfrak{B}_1$ von t_1 nach t_2 sei u_1 die erste Stelle, so daß $\varphi(t) = M$ für alle t von u_1 bis t_2, wobei auch $u_1 = t_2$ sein kann; analog sei u_2 im Bereich $\mathfrak{B}_2$ von t_2 nach t_1 die erste Stelle, so daß $\varphi(t) = m$ von u_2 bis t_1.

Für den Bereich $\mathfrak{B}_1$ werde eine Funktion $\psi_1(t)$ stetig monoton zunehmend gewählt, ebenso für den Bereich $\mathfrak{B}_2$ eine stetige monoton abnehmende Funktion $\psi_2(t)$ und zwar so. daß $\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1) < \psi_2(t_2) = \psi_1(t_2)$. Die einfache stetige Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi_1(t)$ weist dann im Intervall $m < x < M$ für jeden Wert x einen größten zugehörigen Wert $y = f_1(x)$ auf, analog die Kurve $x = \varphi(t), y = \psi_2(t)$ zu jedem x desselben Intervalls einen kleinsten zugehörigen Wert $y = f_2(x)$, wobei die Beziehungen gelten:

$$\lim_{x=m} f_1(x) = \psi_1(t_1) = y_1, \quad \lim_{x=M} f_1(x) = \psi_1(u_1) = \eta_1,$$
$$\lim_{x=M} f_2(x) = \psi_2(t_2) = y_2, \quad \lim_{x=m} f_2(x) = \psi_2(u_2) = \eta_2.$$

Nach dem Hilfssatz gibt es dann eine stetige Funktion $F_1(x)$, so daß $F_1(m) = y_1$, $F_1(M) = \eta_1$ und $F_1(x) > f_1(x)$ für $m < x < M$, ebenso eine stetige Funktion $F_2(x)$, so daß $F_2(M) = y_2$, $F_2(m) = \eta_2$ und $F_2(x) < f_2(x)$ für $m < x < M$ (im Hilfssatz $-f_2(x)$, $-F_2(x)$ für $f(x)$, $F(x)$ genommen). Beachtet man dann die Ungleichungen $\psi_2(t) \geqq f_2(\varphi(t))$, $f_1(\varphi(t)) \geqq \psi_1(t)$, $f_2(x) + F_1(x) - F_2(x) > f_1(x)$ für alle $m < x < M$, $\eta_2 - y_1 \geqq 0$, $y_2 - \eta_1 \geqq 0$, so erkennt man, daß $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine geschlossene *Jordan*sche Kurve ist, wenn $\psi(t)$ definiert wird durch die Festsetzungen: $\psi(t) = \psi_1(t)$ in $\mathfrak{B}_1$, ferner im Bereich $\mathfrak{B}_2$:

$$\psi(t) = \psi_2(t) + F_1(\varphi(t)) - F_2(\varphi(t)) + \eta_2 - y_1 + \frac{(y_2 - \eta_1) - (\eta_2 - y_1)}{M - m} \cdot (\varphi(t) - m) \quad \text{von } t_2 \text{ bis } u_2,$$
$$\psi(t) = \psi_2(t) \quad \text{von } u_2 \text{ bis } t_1.$$

3. Auch für ein auf Problem (A.) bezügliches interessantes Ergebnis von *Pál* läßt sich mittelst des obigen Hilfssatzes ein einfacher Beweis führen. $\mathfrak{M}^0$ ist wieder die Gesamtheit der Punkte t einer Kreislinie, $\mathfrak{M}$ ein topologisches Abbild von $\mathfrak{M}^0$ im R_3, $\mathfrak{M}'$ die Menge jener Punkte der Ebene, die einer stetigen (im allgemeinen nicht einfachen) Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ angehören. Wir beweisen den Satz:

Damit es zu einer gegebenen stetigen Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine auf eine Jordansche Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ führende Ergänzungsfunktion $z = \chi(t)$ gebe, ist hinreichend, daß es zwei verschiedene Punkte A', B' der Menge $\mathfrak{M}'$ gibt, so daß die Gesamtheit der Punkte t von $\mathfrak{M}^0$, denen A' entspricht, und die Gesamtheit der Punkte t von $\mathfrak{M}^0$, denen B' entspricht, einander auf der Kreislinie $\mathfrak{M}^0$ nicht trennen.

Der Fall, daß die Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einen einfachen Punkt A' hat*), ist hierin ersichtlich enthalten, während der ausgesprochene Satz ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes von *Pál* (a. a. O., Nr. 10) ist.

Zum Beweis betrachten wir in der x-y-Ebene das Kreisbüschel mit den Punkten A' und B' als Nullkreisen, wobei wir den durch $\xi^2 = \frac{P'A'^2}{P'A'^2 + P'B'^2}$, $0 \leqq \xi \leqq 1$ definierten Zahlenwert $\xi = \xi(P')$, der für alle Punkte P' desselben Kreises denselben Wert hat, als Parameter des Kreisbüschels einführen. Mit $P'(t)$ werde der Punkt $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ von $\mathfrak{M}'$ bezeichnet. Der Gang des Beweises verläuft dann durchaus analog wie in Nr. 2. Wir suchen jene Punkte t_1, t_2, u_1, u_2 von $\mathfrak{M}^0$ auf, so daß: $P'(t_1) = A'$, $P'(t_2) = B'$; $P'(t) \neq A'$ für Kreispunkte t von t_1 bis t_2 (in positiver Richtung); $P'(t) \neq B'$ für Stellen t von t_2 bis t_1; u_1 die erste Stelle auf dem Bogen $\mathfrak{B}_1$ von t_1 nach t_2, so daß $P'(t) = B'$ für alle t von u_1 bis t_2; u_2 die erste Stelle im Bereich $\mathfrak{B}_2$ von t_2 nach t_1, so daß $P'(t) = A'$ von u_2 bis t_1.

Für den Bereich $\mathfrak{B}_1$ wählen wir eine Funktion $\chi_1(t)$ stetig monoton zunehmend, ebenso $\chi_2(t)$ für den Bereich $\mathfrak{B}_2$ stetig monoton abnehmend und zwar so, daß $\chi_1(t_1) = \chi_2(t_1) < \chi_2(t_2) = \chi_1(t_2)$. Die Punkte der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi_1(t)$, die auf einem und demselben Kreiszylinder $\xi = \text{const.}$ liegen $(0 < \xi < 1)$, weisen hinsichtlich ihrer z-Koordinate einen maximalen Wert $z = f_1(\xi)$ auf, analog die auf $\xi = \text{const.}$ liegenden Punkte

*) *Pál*, II, Nr. 7, S. 4.

der Kurve $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi_2(t)$ einen minimalen Wert $z=f_2(\xi)$, und es ist:

$$\lim_{\xi=0} f_1(\xi)=\chi_1(t_1)=z_1, \quad \lim_{\xi=1} f_1(\xi)=\chi_1(u_1)=\zeta_1,$$
$$\lim_{\xi=1} f_2(\xi)=\chi_2(t_2)=z_2, \quad \lim_{\xi=0} f_2(\xi)=\chi_2(u_2)=\zeta_2.$$

Sind dann $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ dem Hilfssatz gemäß konstruierte stetige Funktionen, die den Bedingungen: $F_1(0)=z_1$, $F_1(1)=\zeta_1$, $F_2(1)=z_2$, $F_2(0)=\zeta_2$ und für $0<\xi<1$: $F_1(\xi)>f_1(\xi)$, $F_2(\xi)<f_2(\xi)$ genügen, so erkennt man analog wie in Nr. 2, daß $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ eine geschlossene *Jordan*sche Kurve ist, wenn in $\mathfrak{B}_1$ gesetzt wird: $\chi(t)=\chi_1(t)$ und in $\mathfrak{B}_2$:

$$\chi(t)=\chi_2(t)+F_1(\xi(P'(t)))-F_2(\xi(P'(t)))+\zeta_2-z_1+[(z_2-\zeta_1)-(\zeta_2-z_1)]\xi(P'(t))$$ von t_2 bis u_2,

$$\chi(t)=\chi_2(t)$$ von u_2 bis t_1.

4. Mit demselben Hilfssatz beweist man schließlich auch folgenden allgemeineren die Frage (A.) betreffenden Satz:

Man betrachte die Gesamtheit $\mathfrak{T}$ der Punkte t der Kreislinie $\mathfrak{M}^0$, die vermöge $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ auf einen und denselben Punkt A' der Bildmenge abgebildet werden. Diese Punkte t mögen auf einem von $t=a_0$ (in positivem Sinne) bis $t=a_p$ reichenden Kreisbogen C_1 liegen), und es seien $a_0, a_1, a_2, \dots a_p$ Punkte von $\mathfrak{T}$, die in dieser Anordnung auf dem Bogen aufeinanderfolgen. Wenn dann auf dem andern Kreisbogen C_2 von a_p nach a_0 der Reihe nach Punkte $t=b_p, b_{p-1}, \dots b_2, b_1$ vorhanden sind, so daß der Punkt $B_i'=P'(b_i)=[x=\varphi(b_i), y=\psi(b_i)]$ von allen Bildpunkten $P'(t)$ des Bogens $a_{i-1}\leqq t\leqq a_i$ verschieden ist $(1\leqq i\leqq p)$, dann gibt es eine Ergänzungsfunktion $z=\chi(t)$ derart, daß $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ eine Jordansche Kurve wird.*

Dieser Satz enthält für $p=2$ (eventuell $p=1$) das allgemeinere von *Pál* erhaltene Resultat (in II, Nr. 10) in sich, wobei die Bildpunkte $P'(a_1)$, $P'(b_1)$, $P'(b_2)$ den Bildpunkten der von *Pál* mit a, b, c bezeichneten Stellen analog sind.

Beweis**): Für den Bereich C_1 von t wählen wir irgendeine monoton wachsende Funktion $\chi_1(t)$. Ferner wählen wir in jedem der Bogen

---

*) Der hier beiseite gelassene Fall $a_0=a_p$ (also A' einfach) ist durch den Satz in Nr. 3 bereits erledigt.

**) Für die Existenz einer Ergänzungsfunktion $z=\chi(t)$ hinreichende noch allgemeinere Bedingungen als die des vorstehenden Satzes sind die folgenden: $P'(t)\neq P'(b_i)$ für $a_{i-1}\leqq t\leqq a_i$, $1\leqq i\leqq p$; $P'(t)\neq P'(a_i)=A_i'$ für $b_{i+1}\leqq t\leqq b_i$, $1\leqq i\leqq p-1$;

von b_i bis b_{i-1} einen Punkt $t = c_{i-1}$ $(2 \leqq i \leqq p)$ und setzen $c_0 = a_0$, $c_p = a_p$. Wir brauchen dann nur für jeden Bogen von c_i bis c_{i-1} eine stetige Funktion $\chi_2(t)$ so zu definieren $(1 \leqq i \leqq p)$, daß $\chi_2(c_{i-1}) = \chi_1(a_{i-1})\,(= Z_{i-1}) < \chi_2(c_i) = \chi_1(a_i)\,(= Z_i)$, ferner $Z_{i-1} < \chi_2(t) < Z_i$ für $c_i \leqq t \leqq c_{i-1}$ ist und daß der Kurvenbogen

$$(1.) \qquad x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi_2(t) \qquad (c_i \leqq t \leqq c_{i-1})$$

einfach ist und mit dem Kurvenbogen

$$(2.) \qquad x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi_1(t) \qquad (a_{i-1} \leqq t \leqq a_i)$$

keinen Punkt gemein hat (von den Stellen $t = c_0 = a_0$ und $t = c_p = a_p$ natürlich abgesehen).

Hierzu führen wir in der x-y-Ebene wie oben den Kreisschar-Parameter $\xi(P') = \dfrac{P'A'}{\sqrt{P'A'^2 + P'B_i'^2}}$ ein und bestimmen den größten Wert $f^{(i)}(\xi)$, bzw. den kleinsten Wert $f_{(i)}(\xi)$ der z-Koordinate aller jener Punkte, die sowohl auf dem Kurvenbogen (2.) als auch auf dem Kreiszylinder $\xi = \text{const.}$ liegen. Dabei sind $f^{(i)}(\xi)$ und $f_{(i)}(\xi)$ monoton und in einem Bereich $0 \leqq \xi \leqq \vartheta_i$ definiert, — mit $0 \leqq \vartheta_i < 1$ gemäß der Voraussetzung über die B_i', — und es bestehen die Grenzwerte

$$\lim_{\xi=0} f^{(i)}(\xi) = z^{(i)}, \quad \lim_{\xi=\vartheta_i} f^{(i)}(\xi) = \zeta^{(i)} = f^{(i)}(\vartheta_i),$$

$$\lim_{\xi=0} f_{(i)}(\xi) = z_{(i)}, \quad \lim_{\xi=\vartheta_i} f_{(i)}(\xi) = \zeta_{(i)} = f_{(i)}(\vartheta_i)$$

mit den Ungleichungen

$P'(t) \neq P'(a_0)$ für $b_1 \leqq t < a_0$; $P'(t) \neq P'(a_p)$ für $a_p < t \leqq b_p$ [also ohne Voraussetzung der Gleichheit der $P'(a_i)$]. Der folgende Beweis des Textes ist hierauf mit leichten Modifikationen übertragbar: Man benützt die Kreisscharparameter $\xi_{j,i}(P')^2 = P'A_j'^2 : (P'A_j'^2 + P'B_i')^2$; $z_{(i)}$ und $z^{(i)}$ werden definiert als größter, bzw. kleinster Wert, so daß der Kurvenbogen (2.) die Strecken $(x, y) = A_{i-1}'$, $Z_{i-1} \leqq z \leqq z_{(i)}$ und $(x, y) = A_i'$, $z^{(i)} \leqq z \leqq Z_i$ enthält ($z_{(i)} < z^{(i)}$ abgesehen von einem trivialen Fall). Dann sei $z_{(i)} < \frac{1}{2}_i < z^{(i)}$; $f^{(i)}(\xi)$ wird definiert als Maximum von z auf (2.) und $\xi_{i,i} = \xi = \text{const.}$ für $0 \leqq \xi \leqq \vartheta_i$ und als lineare Funktion wie im Text für $\vartheta_i \leqq \xi \leqq 1$. Gleichfalls beizubehalten sind die Definition von $F^{(i)}(\xi)$ und $\chi_2(t)$ für $c_i \leqq t \leqq b_i$ (wobei $\xi = \xi_{i,i}$ zu setzen ist) und damit des Stückes S des Kurvenbogens (1.) für $c_i \leqq t \leqq b_i$. Dann wird $f_{(i)}(\xi)$ definiert als kleinste der drei Zahlen: 1) bzw. 2) Minimum von z auf S, bzw. (2.) und $\xi_{i-1,i} = \xi = \text{const.}$, 3) $\frac{1}{2}_i$, — diese letztere Zahl darum hinzugenommen, um $\lim_{\xi=1} f_{(i)}(\xi) = \frac{1}{2}_i$ und nicht bloß $\geqq \frac{1}{2}_i$ zu erhalten. Es ist $f_{(i)}(\xi) > z_{(i)}$ für $\xi > 0$. Die Definition von $F_{(i)}(\xi)$ und $\chi_2(t)$ für $b_i \leqq t \leqq c_{i-1}$, wobei $\xi = \xi_{i-1,i}$ zu setzen ist, erfolgt dann wie im Text. [Zusatz bei d. Korr.].

$$(3^{a}.) \qquad z^{(i)} \leqq Z_i, \quad z_{(i)} \geqq Z_{i-1},$$

$$(3^{b}.) \qquad \zeta^{(i)} < z^{(i)}, \quad \zeta_{(i)} > z_{(i)},$$

$$(3^{c}.) \qquad \zeta^{(i)} \geqq \zeta_{(i)}.$$

Wir schreiben in den Ungleichungen (3^{b}.) die Zeichen $<, >$ statt $\leqq, \geqq$, weil Gleichheitszeichen nur in dem trivialen Falle $\vartheta_i = 0$ eintreten können, in dem $P'(t) = A'$ ist für alle t von a_{i-1} bis a_i; da wir dann den Bogen (a_{i-1}, a_i) mit einem der benachbarten Bogen (a_{i-2}, a_{i-1}) oder (a_i, a_{i+1}) hätten zusammenfassen können, so können wir diesen Fall ausschließen. Wir führen eine der Ungleichung $z^{(i)} > \mathfrak{z}_i > z_{(i)}$ genügende Zahl $\mathfrak{z}_i$ ein und erweitern die Definition der Funktionen $f^{(i)}(\xi)$, $f_{(i)}(\xi)$, indem wir sie im Bereich $\vartheta_i \leqq \xi \leqq 1$ linear und der Gleichung $f^{(i)}(1) = f_{(i)}(1) = \mathfrak{z}_i$ entsprechend annehmen. Offenbar gilt dann auch im erweiterten Bereich $0 \leqq \xi \leqq 1$:

$$(4.) \qquad f^{(i)}(\xi) \geqq f_{(i)}(\xi).$$

Dem Hilfssatz gemäß gibt es zwei stetige Funktionen $F^{(i)}(\xi)$, $F_{(i)}(\xi)$, die den Bedingungen

$$(5.) \qquad \begin{aligned} &F^{(i)}(\xi) > f^{(i)}(\xi), \ F_{(i)}(\xi) < f_{(i)}(\xi) \text{ für } 0 < \xi < 1, \\ &F^{(i)}(0) = z^{(i)}, \ F_{(i)}(0) = z_{(i)}, \ F^{(i)}(1) = F^{(i)}(1) = \mathfrak{z}_i \end{aligned}$$

genügen. Da für $\xi > 0$ die Ungleichungen $f^{(i)}(\xi) < z^{(i)}$, $f_{(i)}(\xi) > z_{(i)}$ bestehen, so können $F^{(i)}$, $F_{(i)}$ speziell so gewählt werden*), daß auch

$$(6.) \qquad F^{(i)}(\xi) < z^{(i)}, \ F_{(i)}(\xi) > z_{(i)} \text{ für } \xi > 0$$

erfüllt ist. Setzt man dann für den Bereich $c_i \leqq t \leqq b_i$

$$\chi_2(t) = F^{(i)}(\xi(P'(t))) + [Z_i - F^{(i)}(\xi(P'(t)))] \frac{b_i - t}{b_i - c_i}$$

und für den Bereich $b_i \leqq t \leqq c_{i-1}$

$$\chi_2(t) = F_{(i)}(\xi(P'(t))) - [F_{(i)}(\xi(P'(t))) - Z_{i-1}] \frac{t - b_i}{c_{i-1} - b_i},$$

so erkennt man aus den Beziehungen (3.), (4.), (5.), (6.) leicht, daß der entstehende Kurvenbogen (1.) einfach ist, abgesehen von den Endpunkten zwischen $z = Z_{i-1}$ und $z = Z_i$ verläuft und den Kurvenbogen (2.) nicht trifft (von den notwendigen Ausnahmefällen $t = c_0$ und $t = c_p$ abgesehen), somit allen Anforderungen genügt.

Natürlich kann man nach Aufstellung der Funktionen $f_{(i)}(\xi)$ und $f^{(i)}(\xi)$ den Aufbau eines geeigneten $\chi_2(t)$ leicht auch stückweise linear vornehmen, in engerer Annäherung an die Methoden von Herrn *Pál.*

---

*) s. in der vorhergehenden Note Nr. 2, Zusatz zu Satz 1.

5. Daß übrigens keine der in den vorstehenden Sätzen angeführten hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein einer Ergänzungsfunktion $z=\chi(t)$ zum Funktionenpaar $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ notwendig ist, zeigt das folgende Beispiel. Man zeichne in der x-y-Ebene zwei Dreiecke ABC, CDE mit der Ecke C als einzigem gemeinsamen Punkt. Den Verlauf der Kurve $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ beschreibe dann das Symbol

$$C_0 A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 \; C_2 A_2 B_2 C_3 D_2 E_2 \ldots$$
$$\ldots C_{2\nu-2} A_\nu B_\nu C_{2\nu-1} D_\nu E_\nu \; C_{2\nu} A_{\nu+1} B_{\nu+1} C_{2\nu+1} E_{\nu+1} D_{\nu+1} \; C_{2\nu+2}$$

mit der Bedeutung, daß der Kurvenpunkt $P'(t)$ zunächst die Dreiecke $CABC$ und $CDEC$ abwechselnd in der angeschriebenen Reihenfolge der Eckpunkte im ganzen ν-mal, hierauf noch einmal $CABC$ und dann $CEDC$ (dieses Dreieck also in umgekehrtem Sinn) durchlaufe. Die Indizes der $A, B, C, \ldots$ geben an, das wievielte Mal der Punkt A, bzw. $B, C, \ldots$ dabei durchlaufen wird. Man kann sich davon überzeugen, daß für $\nu \geqq 2$ kein Punkt des Doppeldreiecks die Eigenschaften des Punktes A' in dem Satz der Nr. 4 aufweist. Gleichwohl gibt es hier eine Ergänzungsfunktion $z=\chi(t)$, die zu einer einfachen Raumkurve führt. Man braucht die z-Werte nur so zu verteilen, wie es die folgenden Ungleichungen andeuten (wobei zum Beispiel $A_1 < A_2$ bedeutet, daß bei einem dem obigen Symbol entsprechenden Durchlaufen der Raumkurve der erste Punkt mit der Projektion A tiefer liegt als der zweite):

$$A_1 < A_2 < \cdots < A_{\nu+1}, \quad D_{\nu+1} < D_1 < D_2 < \cdots < D_\nu,$$
$$B_1 < B_2 < \cdots < B_{\nu+1}, \quad E_{\nu+1} < E_1 < E_2 < \cdots < E_\nu,$$
$$C_{2\nu+2} = C_0 < C_1 < C_3 < \cdots < C_{2\nu+1} < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2\nu}.$$

Danach könnte man vermuten, daß Kurven $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, die *nicht* Projektion einer räumlichen *Jordan*schen Kurve sind, von der Art sein müssen, daß dieselbe Kurve *mehrmals* im wesentlichen in *derselben* Weise durchlaufen wird, von unwesentlichem Hin- und Herlaufen auf Teilen der Bahn natürlich abgesehen. Wenigstens sind alle zurzeit bekannten Beispiele von dieser Art (vgl. *Pál*, II, Nr. 4 und Nr. 6; die reine Periodizität des ersten dieser Beispiele ist natürlich unwesentlich).

Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung.

Methode der unendlichvielen Variabeln.

Von Herrn *Leon Lichtenstein* in Berlin.

Es sei $f(x, y)$ eine für alle x in dem Intervalle $(0, \pi)$ und alle reellen y erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf y stetige, einer Ungleichheit

$$f(x, y) > A$$

genügende Funktion. Das Integral

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx$$

hat für alle nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetigen, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindenden Funktionen $y(x)$ eine endliche untere Grenze d. Zur Bestimmung derjenigen dieser Funktionen, welche der Beziehung

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx = d \tag{1.}$$

genügen, wird in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren eingeschlagen, dessen Grundgedanke sich, wie folgt, kurz wiedergeben läßt.

Es sei $y^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von Vergleichsfunktionen, die so beschaffen sind, daß

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 + f(x, y^{(n)})\right] dx = d_n, \tag{2.}$$

$$\lim_{n=\infty} d_n = d \tag{3.}$$

ist. Eine Folge dieser Art explizite anzugeben, macht gar keine Schwierigkeiten. (Vgl. Kapitel I, § 1.) Wir setzen

$$(4.) \qquad y^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} \sin ix.$$

Die Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Wie im Kapitel I, § 2 des näheren auseinandergesetzt ist, kann man aus der Folge $y^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Teilfolge

$$(5.) \qquad \eta^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i^{(n)}}{i} \sin ix \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

aussondern, so daß für alle ganzzahligen i der Grenzwert

$$(6.) \qquad \lim_{n=\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i$$

existiert. Die unendliche Reihe

$$\sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i}{i} \sin ix$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Die Funktion

$$(7.) \qquad y(x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i}{i} \sin ix$$

hat in $(0, \pi)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung, verschwindet für $x = 0$ und $x = \pi$, genügt der Differentialgleichung

$$(8.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

und ist eine Lösung unseres Variationsproblems.

Die Auswahl unter den Funktionen der Folge $y^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *wird also so getroffen, daß die entsprechenden Fourierschen Koeffizienten allemal konvergieren.* Der Beweis, daß $y(x)$ die gewünschten Eigenschaften hat, beruht in erster Linie darauf, daß die Integrale $\int_0^\pi f(x, y) \sin lx\, dx$ $(l = 1, 2, \ldots)$, als Funktionen der unendlichvielen Variabeln ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ betrachtet, *vollstetig* sind.

Das vorhin in seinen Grundzügen auseinandergesetzte Verfahren wird zunächst auf verschiedene eindimensionale Variationsprobleme angewandt. Es ergeben sich so in I § 4 *periodische* Lösungen $(y(x+2\pi) = y(x))$ der nichtlinearen Differentialgleichung

$$(9.) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y).$$

$\Phi(x, y)$ bezeichnet hier eine für alle reellen x und y erklärte, nebst ihrer Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ stetige Funktion, die überdies den Beziehungen

(10.) $\Phi(x+2\pi, y) = \Phi(x, y)$, $\Phi(x, y) > 0$ $(y \geqq \alpha)$, $\Phi(x, y) < 0$ $(y \leqq -\alpha)$ genügt, unter α einen übrigens willkürlichen positiven Wert verstanden. Die gefundene Lösung ist keine Konstante, sofern noch vorausgesetzt wird, daß $\Phi(x, y)$ für keinen Wert von y in dem Intervalle $-\alpha \leqq y \leqq \alpha$ in bezug auf x identisch verschwindet.

In I § 5 wird eine stetige, periodische Lösung $(y(x+2\pi) = y(x))$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k(x)e^y \tag{11.}$$

bestimmt, deren erste Ableitung in einem vorgegebenen Punkte ξ eine durch die Beziehung

$$\frac{d}{dx}y(\xi+0) - \frac{d}{dx}y(\xi-0) = -h_0 \tag{12.}$$

charakterisierte Unstetigkeit aufweist. Die Funktion $k(x)$ ist stetig und wesentlich positiv:

$$k(x) \geqq k_1 > 0.$$

h_0 ist eine willkürliche positive Zahl.

In I § 6 wird ein isoperimetrisches Problem betrachtet.

Das zweite und das dritte Kapitel sind der Betrachtung zweidimensionaler Variationsprobleme gewidmet. Die Durchführung der Methode ist hier schwieriger, gelingt jedoch, ohne daß man genötigt ist, zu den schärferen Hilfsmitteln der neueren Analysis (wie dem *Lebesgue*schen Integralbegriff, dem *Fischer-Riesz*schen Satze usw.) Zuflucht zu nehmen.

Es sei T ein von einer endlichen Anzahl geschlossener, regulär analytischer Kurven S begrenztes endliches Gebiet, $P(x, y, u)$ eine für alle (x, y) in T und auf S und alle reellen u nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, den Beziehungen

$$P(x, y, u) > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)\right| < A_2, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial u^2}P(x, y, u)\right| < A_2 \tag{13.}$$

genügende Funktion (A_2 ist eine Konstante).

In den §§ 1 bis 3 des zweiten Kapitels wird, von einem Variationsproblem ausgehend, eine beschränkte, in T nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u) \tag{14.}$$

bestimmt, die auf S eine vorgeschriebene, der Einfachheit halber regulär analytische Folge von Werten annimmt.

In seinen bekannten Arbeiten über die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus hat Herr *S. Bernstein* ausgedehnte Klassen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen von der Form

$$(15.) \qquad A(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x, y, p, q)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D(x, y, z, p, q), \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

angegeben, für die das erste Randwertproblem eine Lösung hat*). Die von uns betrachtete Differentialgleichung (14.) ist von einem viel spezielleren Charakter, gehört aber im allgemeinen den von Herrn *S. Bernstein* untersuchten Klassen nicht an.

Die in dieser Abhandlung eingeschlagene Methode gestattet indessen in einer Hinsicht über die Resultate des Herrn *S. Bernstein* hinauszugehen. Sie läßt sich z. B. ohne weiteres auf die Auflösung des *zweiten* und des *dritten Randwertproblems* anwenden.

Im Kapitel III wird eine beschränkte, in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$(16.) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)$$

bestimmt, die auf S der Bedingung

$$(17.) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = hu$$

genügt. Hierin bezeichnet wie üblich $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale, $q(x, y)$ eine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, nichtnegative Funktion, h eine auf S erklärte wesentlich positive Funktion ($h \geqq \bar{h} > 0$). Das zugehörige Variationsproblem lautet jetzt so: *Unter allen in T und auf S stetigen Funktionen $u(x, y)$, die in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und deren Dirichletsches Integral*

*) Vgl. *S. Bernstein*, Sur la généralisation du problème de *Dirichlet*. II, Math. Annalen, Bd. 69, 1910, S. 82. Sur les équations du calcul des variations, Annales de l'École Normale, (3) t. 29, 1912, p. 431—485.

$$(18.) \qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

existiert, sind diejenigen zu bestimmen, für die der Integralausdruck

$$(19.) \qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + q u^2 + P(x, y, u)\right] dx\,dy + \int_S h u^2\, ds$$

ein Minimum wird.

Ist $q(x, y)$ nicht identisch gleich Null, so kann man h gleich Null setzen. Man erhält so eine Lösung des zweiten Randwertproblems der Differentialgleichung

$$(20.) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q u = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u).$$

In § 4 des III. Kapitels werden unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion $P(x, y, u)$ Lösungen der Differentialgleichung (20.) bestimmt, *die sich auf geschlossenen, singularitätenfreien Flächen nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhalten.*

Die Voraussetzungen (13.) sind für die Anwendbarkeit unserer Methode nicht immer notwendig. So gelingt in II § 4 *die Bestimmung derjenigen stetigen Lösung der Differentialgleichung*

$$(21.) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(x, y) e^u,$$

die im Innern des Gebietes T sich nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhält und auf S eine vorgeschriebene, der Einfachheit halber regulär analytische Folge von Werten annimmt. Die Funktion $k(x, y)$ ist positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig.

Mit der Differentialgleichung (21.) hat sich Herr *Picard* in seinen berühmten Arbeiten über die Methode der sukzessiven Approximationen beschäftigt. Herr *Picard* löst das Randwertproblem zunächst für ein hinreichend kleines Gebiet auf und geht dann zu allgemeinen Gebieten mit Hilfe des alternierenden Verfahrens des Herrn *H. A. Schwarz* über. Unsere Methode liefert die gesuchte Lösung direkt.

Beträchtlich schwieriger als das obige Randwertproblem ist die Bestimmung derjenigen Lösung der Differentialgleichung (21.), *die sich auf einer geschlossenen, singularitätenfreien Fläche, mit Ausnahme gewisser Punkte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig verhält, in jenen Punkten aber vorgeschriebene logarithmische Unstetigkeiten hat.*

Diese von Herrn *H. A. Schwarz* im Jahre 1890 gestellte Aufgabe ist von Herrn *Picard* ebenfalls unter Zuhilfenahme eines alternierenden Verfahrens gelöst worden*). Eine andere recht umständliche Lösung ist von *Poincaré* gegeben worden**). Die in dieser Abhandlung dargelegte Methode liefert, in geeigneter Weise modifiziert, eine direkte, sehr einfache Lösung auch dieses Problems***).

In dem vierten Schlußkapitel dieser Arbeit bestimme ich eine Lösung der homogenen nichtlinearen Integralgleichung

$$\Theta(u) = \lambda \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\, \Theta(s)\, \Theta(t)\, ds\, dt,$$

unter $K(s, t, u)$ eine stetige, symmetrische Funktion verstanden. Diese Aufgabe ist zuerst von Herrn *Fubini* auf einem anderen Wege gelöst worden†).

Es sei zum Schluß bemerkt, daß Sätze über die Existenz eines Extremums „im kleinen" in der vorliegenden Arbeit nicht benutzt werden. Hat ferner das Problem nur eine Lösung, so ist, wie sich a posteriori zeigt, bereits

$$\lim_{n=\infty} x_i^{(n)} = \xi_i,$$

so daß von einer Auswahl unter den Funktionen $y^{(n)}(x)$ überhaupt abgesehen werden kann. Unsere Methode liefert also, sofern die Lösung eindeutig ist, nicht nur einen Existenzbeweis, sondern, wenigstens im Prinzip, auch ein Mittel, die Lösung mit beliebiger Annäherung wirklich zu berechnen††).

---

*) Vgl. *E. Picard*, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, Journ. de Math. (4), t. 6, 1890, p. 145—210; *De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée*, Journ. de Math. (4), t. 9, 1893, p. 273—291, *De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée*, dieses Journal Bd. 130, 1905, S. 243—258.

**) Vgl. *H. Poincaré*, *Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$*, Journal de Mathématiques (5), t. 4, 1898, p. 137—230.

***) Vgl. *L. Lichtenstein*, *Integration der Differentialgleichung $\Delta_2 u = ke^u$ auf geschlossenen Flächen*, Acta mathematica, B. 37, 1914, S. 327—360.

†) Vgl. *G. Fubini*, *Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali*, Annali di Matematica, t. 20, 1913, p. 217—244.

††) Einen Teil der Resultate dieser Arbeit habe ich in der vor kurzem erschienenen Note, *Sur quelques applications de la notion des fonctions d'une infinité de variables au calcul des variations*, Comptes rendus, de l'acad. des sciences, Paris, t. 157, 1913, p. 669—672, zusammengefaßt.

Kapitel I. Eindimensionale Variationsprobleme.

§ 1. Lösungen mit vorgeschriebenen Endwerten.

Es sei $f(x, y)$ eine für alle x in dem Intervalle $(0, \pi)$ und alle reellen y erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in bezug auf y stetige, einer Beziehung

$$f(x, y) > A \quad (A = \text{Konstante}) \tag{1.}$$

genügende Funktion.

Wir stellen uns die Aufgabe, *diejenigen in* $(0, \pi)$*) nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetigen, für* $x = 0$ *und* $x = \pi$ *verschwindenden Funktionen* $y(x)$ *zu bestimmen, die das Integral*

$$I = \int_0^\pi \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx \tag{2.}$$

zum Minimum machen.

Betrachten wir die Gesamtheit der Funktionen $y(x)$.

Nach (1.) ist

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx > \pi A. \tag{3.}$$

Die Gesamtheit der Werte I hat also eine endliche untere Grenze d. Diese läßt sich wie folgt bestimmen.

Es sei

$$t^{(n)}(x) = \sum_i^{1 \dots n} \frac{a_i \sin ix}{i}, \tag{4.}$$

unter $a_i (i = 1, \dots n)$ reelle, zunächst noch unbestimmte Parameter verstanden. Wir setzen

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dt^{(n)}}{dx}\right)^2 + f(x, t^{(n)})\right] dx = \frac{\pi}{2} \sum_i^{1 \dots n} a_i^2 + \int_0^\pi f(x, t^{(n)}) dx = Q(a_1, \dots a_n). \tag{5.}$$

Nach (3.) ist

$$Q(a_1, \dots a_n) > \pi A. \tag{6.}$$

Also hat $Q(a_1, \dots a_n)$ für alle reellen $a_1, \dots a_n$ eine endliche untere Grenze d_n. Da nach (1.) und (5.) die Funktion $Q(a_1, \dots a_n)$ positiv unendlich wird, wenn auch nur eine der Größen $a_1, \dots a_n$ unendliche Werte annimmt, so wird d_n im Endlichen erreicht.

---

*) Hier wie in allen ähnlichen Fällen heißt „in $(0, \pi)$“ genauer „in dem Intervalle $(0, \pi)$, die Grenzen eingeschlossen“.

Es sei

$$d_n = Q(x_1^{(n)}, \dots x_n^{(n)}). \tag{7.}$$

Wir setzen

$$y^{(n)}(x) = \sum_i^{1 \dots n} \frac{x_i^{(n)}}{i} \sin ix. \tag{8.}$$

Dann ist

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 + f(x, y^{(n)})\right] dx = d_n. \tag{9.}$$

Da die Funktionen $Q(a_1, \dots a_n)$ unter den Funktionen $Q(a_1, \dots a_{n+1})$ enthalten sind, so ist gewiß

$$d_{n+1} \leqq d_n. \tag{10.}$$

Da ferner nach (6.) für alle n

$$d_n > \pi A \tag{11.}$$

ist, so hat die Folge

$$d_1 > d_2 > d_3 > \cdots \tag{12.}$$

eine endliche untere Grenze d. Der Wert d ist zugleich die gesuchte untere Grenze der Werte des Integrals (1.) für alle zum Vergleich zugelassenen Funktionen $y(x)$ überhaupt.

Es sei im Gegensatz zu dieser Behauptung

$$\tau(x) = \sum_i^{1 \dots \infty} \frac{c_i \sin ix}{i} \tag{13.}$$

eine in $(0, \pi)$ nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Funktion, so daß

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2 + f(x, \tau)\right] dx = \frac{\pi}{2} \sum_i^{1 \dots \infty} c_i^2 + \int_0^\pi f(x, \tau)\, dx < d \tag{14.}$$

ist. Man kann dann, da die Reihe (13.) gleichmäßig konvergiert, gewiß eine positive ganze Zahl μ so groß wählen, daß, wenn man

$$\tau^{(\mu)}(x) = \sum_i^{1 \dots \mu} \frac{c_i \sin ix}{i} \tag{15.}$$

setzt,

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{d\tau^{(\mu)}}{dx}\right)^2 + f(x, \tau^{(\mu)})\right] dx = \frac{\pi}{2} \sum_i^{1 \dots \mu} c_i^2 + \int_0^\pi f(x, \tau^{(\mu)})\, dx < d \leqq d_\mu \tag{16.}$$

wird. Dies steht aber im Widerspruch mit der Tatsache, daß d_μ das Minimum der Werte des Integrals (2.) für alle Funktionen von der Form

$$t^{(\mu)}(x) = \sum_i^{1 \dots \mu} \frac{a_i}{i} \sin ix \tag{17.}$$

ist.

Durch die vorstehenden Ausführungen haben wir die untere Grenze d des Integrals (2.) bestimmt. Darüber hinaus haben wir ferner eine Folge von Funktionen $y^{(n)}(x)$ gewonnen, die nebst ihrer Ableitung erster Ordnung in $(0, \pi)$ stetig (übrigens sogar analytisch) sind, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwinden und überdies so beschaffen sind, daß

$$(18.) \qquad \int_0^\pi \left[\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 + f(x, y^{(n)})\right] dx = d_n,$$

$$(19.) \qquad \lim_{n=\infty} d_n = d$$

ist.

Der Übersichtlichkeit halber setzen wir statt (8.)

$$(20.) \qquad y^{(n)}(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} \sin ix.$$

Der Umstand, daß $x_i^{(n)}$ für $n > i$ verschwindet, ist für die weitere Betrachtung belanglos*).

§ 2. Fortsetzung.

Offenbar ist für alle hinreichend großen n etwa

$$(21.) \qquad \int_0^\pi \left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx < d + \tfrac{1}{2} + |A|,$$

somit für alle n überhaupt

$$(22.) \qquad \int_0^\pi \left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx < d_0,$$

unter d_0 eine positive Zahl verstanden.

Die unendliche Reihe $\sum_i^{1\ldots\infty} (x_i^{(n)})^2$ konvergiert. Es ist ferner

$$(23.) \qquad \frac{\pi}{2} \sum_i^{1\ldots\infty} (x_i^{(n)})^2 = \int_0^\pi \left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx < d_0, \quad |x_i^{(n)}| < \sqrt{\frac{2d_0}{\pi}}. \qquad (i, n = 1, 2, \ldots)$$

---

*) Der für die Ermittelung der unteren Grenze d und der Folge $y^{(n)}(x)$ wesentliche Gedanke der Bestimmung des Minimums der Funktion $Q(a_1, \ldots a_n)$ stammt von *W. Ritz* (vgl. *W. Ritz, Über eine neue Methode in der Variationsrechnung*, dieses Journal, Bd. 135, 1909, S. 1 ff.). Bekanntlich gelang es *Ritz* seinen Ansatz zu einem vollständigen Beweise der Existenz der das Minimum liefernden Funktion bei gewissen linearen ein- und zweidimensionalen Variationsproblemen auszugestalten. Das *Ritz*sche Verfahren ist seither in der Literatur verschiedentlich zur approximativen Behandlung gewisser Probleme der Elastizitätstheorie, Festigkeitslehre u. dgl. angewandt worden.

Mit Hilfe des bekannten Diagonalverfahrens kann man aus der Funktionenfolge $y^{(n)}(x)$ eine weitere Folge

$$\eta^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{\xi_i^{(n)}}{i} \sin ix \qquad (n = 1, 2, \dots) \tag{24.}$$

extrahieren, so daß für alle i der Grenzwert $\lim\limits_{n=\infty} \xi_i^{(n)}$ existiert. Wir setzen

$$\lim_{n=\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i. \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{25.}$$

Es ist nun

$$\sum_{i}^{1\dots p} (\xi_i^{(n)})^2 \leqq \frac{2}{\pi} d_0, \quad \text{daher} \quad \sum_{i}^{1\dots p} \xi_i^2 \leqq \frac{2}{\pi} d_0,$$

$$\sum_{i}^{1\dots\infty} \xi_i^2 \leqq \frac{2}{\pi} d_0. \tag{26.}$$

Wie man leicht sieht, *konvergieren die Funktionen* $\eta^{(n)}(x)$ *für alle* x *in* $(0, \pi)$ *gleichmäßig gegen*

$$y(x) = \sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{\xi_i}{i} \sin ix. \tag{27.}$$

In der Tat ist

$$y(x) - \eta^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1\dots p} \frac{(\xi_i - \xi_i^{(n)})}{i} \sin ix + R_p, \quad R_p = \sum_{i>p} \frac{(\xi_i - \xi_i^{(n)})}{i} \sin ix,$$

$$|R_p|^2 < \sum_{i>p} [\xi_i - \xi_i^{(n)}]^2 \sum_{i>p} \frac{1}{i^2} < 2 \sum_{i}^{1\dots\infty} [\xi_i^2 + (\xi_i^{(n)})^2] \sum_{i>p} \frac{1}{i^2} < \frac{8}{\pi} d_0 \sum_{i>p} \frac{1}{i^2},$$

daher

$$\lim_{n=\infty} \eta^{(n)}(x) = y(x).$$

Setzt man

$$\int_0^\pi \left\{ \left(\frac{d\eta^{(n)}(x)}{dx} \right)^2 + f(x, \eta^{(n)}) \right\} dx = \delta_n, \tag{28.}$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = d. \tag{29.}$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi f(x, \eta^{(n)})\, dx = \lim_{n=\infty} \Delta_n = \int_0^\pi f(x, y)\, dx = \Delta. \tag{30.}$$

Wir finden nunmehr

$$\frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\dots\infty} (\xi_i^{(n)})^2 = \delta_n - \Delta_n, \quad \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\dots p} (\xi_i^{(n)})^2 \leqq \delta_n - \Delta_n, \quad \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\dots p} \xi_i^2 \leqq d - \Delta,$$

$$\frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\dots\infty} \xi_i^2 \leqq d - \Delta. \tag{31.}$$

Ich behaupte, in der zuletzt hingeschriebenen Beziehung gilt das Gleichheitszeichen. Dies sieht man so ein. Es sei etwa

$$\frac{\pi}{2}\sum_{i}^{1\ldots\infty}\xi_i^2=\delta'<d-\Delta.$$

Man kann dann μ gewiß so groß wählen, daß,

$$(32.)\qquad \sum_{i}^{1\ldots\mu}\frac{\xi_i}{i}\sin ix=\bar{y}(x)$$

gesetzt,

$$\int_0^\pi f(x,\bar{y})\,dx<\Delta+\frac{d-\Delta-\delta'}{2}$$

und daher

$$\int_0^\pi\left\{\left(\frac{d\bar{y}}{dx}\right)^2+f(x,\bar{y})\right\}dx<\delta'+\Delta+\frac{d-\Delta-\delta'}{2}=d-\frac{d-\Delta-\delta}{2}$$

wird. Dies wäre jedoch im Widerspruch mit der Annahme, daß d die untere Grenze der Werte I ist. Also ist

$$\frac{\pi}{2}\sum_{i}^{1\ldots\infty}\xi_i^2=d-\Delta,$$

$$(33.)\qquad \frac{\pi}{2}\sum_{i}^{1\ldots\infty}\xi_i^2+\int_0^\pi f(x,y)\,dx=d.$$

Es sei ε eine dem absoluten Betrage nach hinreichend kleine, sonst willkürliche Zahl. Es ist,

$$(34.)\quad \sum_{i}^{1\ldots\mu}\frac{\xi_i}{i}\sin ix+\frac{\varepsilon}{l}\sin lx=\bar{y}^*(x),\qquad \sum_{i}^{1\ldots\infty}\frac{\xi_i}{i}\sin ix+\frac{\varepsilon}{l}\sin lx=y^*(x)$$

gesetzt,

$$\frac{\pi}{2}(\xi_1^2+\cdots+\xi_{l-1}^2+(\xi_l+\varepsilon)^2+\xi_{l+1}^2+\cdots+\xi_\mu^2)+\int_0^\pi f(x,\bar{y}^*)\,dx\geqq d,$$

daher nach Übergang zur Grenze $\mu=\infty$

$$\frac{\pi}{2}(\xi_1^2+\cdots+\xi_{l-1}^2+(\xi_l+\varepsilon)^2+\xi_{l+1}^2+\cdots)+\int_0^\pi f(x,y^*)\,dx\geqq d,$$

$$\frac{\pi}{2}(2\varepsilon\xi_l+\varepsilon^2)+\int_0^\pi[f(x,y^*)-f(x,y)]\,dx\geqq 0,$$

somit

$$\frac{\pi}{2}(2\varepsilon\xi_l+\varepsilon^2)+\frac{\varepsilon}{l}\int_0^\pi\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\sin lx\,dx$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2l^2}\int_0^\pi\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\Big(x,y+\frac{\varepsilon\theta(x)}{l}\sin lx\Big)(\sin lx)^2dx\geqq 0,\quad 0<\theta(x)<1.$$

In bekannter Weise schließt man hieraus

$$\pi\xi_l + \frac{1}{l}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \sin lx\, dx = 0. \qquad (l=1, 2, \ldots) \tag{35.}$$

Es sei ζ_i $(i=1, 2, \ldots)$ eine beliebige Folge von Werten mit konvergenter Quadratsumme und es sei

$$v(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{\zeta_i}{i} \sin ix. \tag{36.}$$

Aus (35.) folgt

$$\pi \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i\zeta_i + \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) v(x)\, dx = 0. \tag{37.}$$

Setzen wir insbesondere

$$v(x) = G(x_0, x), \tag{38.}$$

unter $G(x_0, x)$ die für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende *Green*sche Funktion der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ verstanden:

$$\begin{aligned} G(x_0, x) &= \frac{(\pi - x_0)x}{\pi} \qquad (x \leqq x_0), \\ &= \frac{(\pi - x)x_0}{\pi} \qquad (x \geqq x_0), \quad \frac{\partial}{\partial x} G(x_0, x_0+0) - \frac{\partial}{\partial x}(x_0, x_0-0) = -1. \end{aligned} \tag{39.}$$

Wir erhalten, wenn wir wieder

$$\bar{y}(x) = \sum_i^{1\ldots\mu} \frac{\xi_i}{i} \sin ix$$

schreiben, mit Rücksicht auf (37.)

$$\begin{aligned} \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i\zeta_i &= \lim_{\mu=\infty} \sum_i^{1\ldots\mu} \xi_i\zeta_i = \lim_{\mu=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\bar{y}}{dx}\frac{\partial G(x_0, x)}{\partial x}\, dx \\ &= \lim_{\mu=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{y}\frac{\partial G(x_0, x)}{\partial x}\right) - \bar{y}\frac{\partial^2 G(x_0, x)}{\partial x^2}\right] dx = \lim_{\mu=\infty} \frac{2}{\pi}\bar{y}(x_0) = \frac{2}{\pi} y(x_0), \end{aligned} \tag{40.}$$

daher

$$y(x_0) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\pi G(x_0, x)\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx. \tag{41.}$$

Hieraus folgt sofort in bekannter Weise, daß $y(x_0)$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \tag{42.}$$

genügt. Es ist schließlich zufolge (33.)

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx = d. \tag{43.}$$

Die Funktion $y(x)$ ist eine Lösung unseres Variationsproblems. Sie ist

gewiß nicht identisch gleich Null, wenn $\frac{\partial}{\partial y} f(x, 0)$ nicht identisch verschwindet.

§ 3. Fortsetzung.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß die gesuchte Lösung für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet. Soll allgemeiner

$$(44.) \qquad y(0) = y_0, \quad y(\pi) = y_1$$

sein, so setzen wir

$$(45.) \quad Y(x) = y(x) - \left(y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\pi} x\right), \quad f\left(x, Y(x) + y_0 + \frac{y_1 - y_0}{\pi} x\right) = f^*(x, Y),$$

wodurch die Aufgabe auf die vorerwähnte zurückgeführt wird. Man könnte aber auch einen direkten Weg einschlagen. Es wäre dann $y^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Vergleichsfunktionen, die für $x = 0$ und $x = \pi$ entsprechend die Werte y_0 und y_1 annehmen und im übrigen die Beziehungen (18.) und (19.) erfüllen. Man würde unter sinngemäßer Anwendung der vorhin gebrauchten Bezeichnungen setzen

$$(46.) \qquad y^{(n)}(x) = x_0^{(n)} + \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} \cos ix,$$

daher

$$(47.) \qquad x_0^{(n)} + \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} = y_0, \quad x_0^{(n)} + \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{(-1)^i x_i^{(n)}}{i} = y_1.$$

Es ergibt sich dann

$$(48.) \qquad \frac{\pi}{2} \sum_i^{1 \ldots \infty} (x_i^{(n)})^2 < d_0, \qquad |x_i^{(n)}| < \sqrt{\frac{2 d_0}{\pi}} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

und aus (47.)

$$(49.) \quad |x_0^{(n)}| \leqq |y_0| + \left| \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} \right| < |y_0| + \sqrt{\sum_i^{1 \ldots \infty} (x_i^{(n)})^2 \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{1}{i^2}} < |y_0| + \sqrt{\frac{2 d_0}{\pi} \frac{\pi^2}{6}} < d_1,$$

unter d_1 eine positive Konstante verstanden.

Die weitere Betrachtung verläuft ganz wie vorhin. Da die Funktionen $\eta^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gegen $y(x)$ gleichmäßig konvergieren, so ist auch

$$(50.) \quad y(0) = \lim_{n=\infty} \eta^{(n)}(0) = y_0, \qquad y(\pi) = \lim_{n=\infty} \eta^{(n)}(\pi) = y_1.$$

Von der Gleichung (33.) gelangen wir zu den Gleichungen (35.), wenn wir jetzt

$$(51.) \qquad y^*(x) = \xi_0 + \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{\xi_i}{i} \cos ix + \frac{\varepsilon}{l} \sin lx$$

setzen. Die variierte Kurve geht dann nämlich tatsächlich durch die

Punkte $(0, y_0)$, (π, y_1) hindurch. Den Rest der Betrachtung abkürzend kann man jetzt so schließen. Da, wie man weiß, die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty}\Big(\int_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\sin ix\,dx\Big)^2 \tag{52.}$$

konvergiert, so konvergiert auch die Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty} i^2\xi_i^2.$$

Die unendliche Reihe

$$-\sum_i^{1\ldots\infty}\xi_i\sin ix \tag{53.}$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig und stellt die Funktion $\frac{dy}{dx}$ dar. Also hat $y(x)$ stetige Ableitung erster Ordnung. Aus (33.) folgt

$$\int_0^{\pi}\Big[\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2+f(x,y)\Big]dx=d.$$

Nach bekannten Sätzen hat $y(x)$ nunmehr auch stetige Ableitung zweiter Ordnung und erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y).$$

Im allgemeinen ist die Lösung unseres Variationsproblems nicht eindeutig. Sie ist es indessen gewiß, wenn für alle x in dem Intervalle $(0, \pi)$ und alle endlichen y

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)>0 \tag{54.}$$

ist. Es sei nämlich $\mu(x)$ eine etwa von $y(x)$ verschiedene Lösung. Die Differenz

$$\mu_1(x)=\mu(x)-y(x)$$

erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mu_1(x)}{dx^2}=\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\big(x,y+\theta_1(x)(\mu-y)\big)\mu_1(x),\quad 0<\theta_1(x)<1. \tag{55.}$$

Wäre die Funktion $\mu_1(x)$ nicht identisch gleich Null, so müßte sie in $(0, \pi)$ entweder positives Maximum oder negatives Minimum oder auch beides haben. Es möge etwa $\mu_1(x)$ im Punkte x_0 positives Maximum haben. Dann wäre

$$\frac{d^2\mu_1(x_0)}{dx^2}\leqq 0,\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}f\big(x_0,y+\theta_1(\mu-y)\big)\mu_1(x_0)>0,$$

was einen Widerspruch bedeutet. Ebenso erweist sich die andere noch denkbare Annahme als unmöglich. Daher ist

$$\mu(x) \equiv y(x).$$

Es ist leicht zu sehen, daß im vorliegenden Falle bereits

$$\lim_{n=\infty} x_i^{(n)} = \xi_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

ist. Hätte nämlich auch nur eine Kolonne der Matrix $x_i^{(n)}$ mehr als eine Häufungsstelle, so würde man aus der Folge $y^{(n)}(x)$ außer der Folge $\eta^{(n)}(x)$ mindestens noch eine andere Folge aussondern können, die gegen eine Grenzfunktion gleichmäßig konvergiert. Man würde daher auch mindestens zwei verschiedene Lösungen erhalten, was der Voraussetzung widerspricht*).

Ist also die Lösung eindeutig, so konvergiert jede Minimalfolge $y^{(n)}(x)$ gleichmäßig gegen die Extremalfunktion.

Unser Verfahren liefert alsdann nicht nur einen Existenzbeweis, sondern wenigstens im Prinzip auch noch ein Mittel, die Lösung wirklich zu berechnen.

Nun einige Beispiele. Es sei zuerst

$$(56.)\quad \tfrac{1}{2} f(x,y) = \frac{1}{2n+2} y^{2n+2} + \frac{a_1(x)}{2n+1} y^{2n+1} + \frac{a_2(x)}{2n} y^{2n} + \cdots + \frac{a_{2n}(x)}{2} y^2 + a_{2n+1}(x)\, y,$$

unter $a_i(x)(i = 1, \ldots 2n+1)$ stetige Funktionen verstanden. Man erhält die Differentialgleichung

$$(57.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = y^{2n+1} + a_1(x)\, y^{2n} + a_2(x)\, y^{2n-1} + \cdots + a_{2n}(x)\, y + a_{2n+1}(x).$$

Durch zwei beliebige Punkte der Ebene (x_0, y_0), (x_1, y_1) geht mindestens eine nebst ihrer Ableitung erster und zweiter Ordnung stetige Lösung dieser Differentialgleichung.

Ist insbesondere

$$(58.)\quad a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n+1} = 0, \qquad a_2 > 0, a_4 > 0, \ldots a_{2n} > 0,$$

liegt also eine Differentialgleichung von der Form

$$(59.)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = y^{2n+1} + \beta_1(x)\, y^{2n-1} + \beta_2(x)\, y^{2n-3} + \cdots + \beta_n(x)\, y, \quad \beta_i > 0 \quad (i=1,\ldots n)$$

vor, so gibt es nur eine Lösung dieser Art.

Es sei zweitens

$$(60.)\qquad f(x,y) = 2k(x)e^y,$$

unter $k(x)$ eine wesentlich positive, stetige Funktion verstanden:

$$(61.)\qquad k(x) \geqq k_0 > 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi).$$

---

*) Ähnliches gilt allgemein bei unendlichen Folgen $x_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$, deren Glieder in ihrer Gesamtheit beschränkt sind. Vgl. *F. Riesz*, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris 1913, S. 57—58.

Es handelt sich also um das Minimum des Integrals

$$\int_0^\pi \left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2k(x)e^y\right\} dx. \tag{62.}$$

Man gelangt zu einer nebst ihrer Ableitung erster und zweiter Ordnung stetigen Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ke^y, \tag{63.}$$

die für $x=0$ den Wert y_0, für $x=\pi$ den Wert y_1 annimmt. Die Lösung ist eindeutig, da

$$\frac{\partial}{\partial y}(ke^y) = ke^y > 0 \tag{64.}$$

ist.

Wir haben uns bis jetzt ausschließlich mit Variationsproblemen mit einer unbekannten Funktion beschäftigt. Liegen mehrere unbekannte Funktionen vor, so verläuft die Untersuchung ganz analog. Als Beispiel betrachten wir nunmehr ein Problem der Dynamik.

Es sei $(x_i, y_i, z_i)\,(i=1, \dots q)$ ein System materieller Punkte von der Masse $m_i\,(i=1, \dots q)$, auf welches Kräfte $(X_i, Y_i, Z_i)\,(i=1, \dots q)$ wirken. Diese mögen von einer Kräftefunktion

$$H(x_1, y_1, z_1; \dots x_q, y_q, z_q; t) \tag{65.}$$

abhängen, unter t die Zeit verstanden, so daß

$$X_i = \frac{\partial H}{\partial x_i},\quad Y_i = \frac{\partial H}{\partial y_i},\quad Z_i = \frac{\partial H}{\partial z_i} \qquad (i=1, \dots q) \tag{66.}$$

ist. Die Funktion H sei für alle reellen Werte der Argumente x_i, y_i, z_i $(i=1, \dots q)$ und alle t in einem Intervalle

$$t_0 \leqq t \leqq t_1 \tag{67.}$$

erklärt und daselbst nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf x_i, y_i, z_i $(i=1, \dots q)$ stetig. Ferner soll H für alle t in (67.) und alle x_i, y_i, z_i eine endliche untere Grenze haben.

Es seien $B_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ und $C_i(\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{y}}_i, \bar{\bar{z}}_i)$ $(i=1, \dots q)$ zwei beliebige Lagen des Punktsystems. Es gibt dann mindestens eine Bahn, auf der unsere materiellen Punkte in dem Zeitintervall (67.) aus der Lage $B_i(i=1, \dots q)$ in die Lage $C_i(i=1, \dots q)$ gelangen.

Nach dem *Hamilton*schen Prinzip kann man, was sich auch unmittelbar verifizieren läßt, die Differentialgleichungen der Bewegung dadurch erhalten, daß man die erste Variation des Integrals

(68.) $$\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{i}^{1\ldots q}\tfrac{1}{2}m_i\Big\{\Big(\frac{dx_i}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy_i}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dz_i}{dt}\Big)^2\Big\}+H(x_1,y_1,z_1;\ldots x_q,y_q,z_q;t)\Big]dt$$

gleich Null setzt. Auf dieselben Differentialgleichungen führt offenbar dann auch die Bestimmung des absoluten Minimums des Integrals (68.) unter den Grenzbedingungen

(69.) $$\begin{aligned} &x_i=\bar{x}_i,\ y_i=\bar{y}_i,\ z_i=\bar{z}_i \text{ für } t=t_0,\\ &x_i=\bar{\bar{x}}_i,\ y_i=\bar{\bar{y}}_i,\ z_i=\bar{\bar{z}}_i \text{ für } t=t_1. \end{aligned} \qquad (i=1,\ldots q)$$

Die Behandlung des vorliegenden Variationsproblems verläuft in allen Teilen der Betrachtung der §§ 1 bis 3 parallel. Es erscheint daher überflüssig, auf diesen Gegenstand näher einzugehen.

Bezeichnen wir jetzt vorübergehend die Variabeln $x_1, y_1, z_1, \ldots x_q, y_q, z_q$ mit $x_1, x_2, \ldots x_{3q}$. Ist die quadratische Form

(70.) $$\sum_{i,j}^{1\ldots 3q}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial x_j}\delta_i\delta_j$$

für alle t in (67.) und alle $x_k (k=1,\ldots 3q)$ positiv definit, so haben die Differentialgleichungen der Bewegung nur ein System der Lösungen, die in dem Intervalle (t_0, t_1) nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind und den Bedingungen (69.) genügen*).

§ 4. Periodische Lösungen.

Es sei $F(x, y)$ eine für alle reellen x und y erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf y stetige, der Beziehung

(71.) $$F(x+2\pi, y)=F(x, y)$$

genügende Funktion. Für alle hinreichend großen positiven Werte von y soll $\frac{\partial F}{\partial y}>0$, für alle hinreichend großen negativen y hingegen $\frac{\partial F}{\partial y}<0$ sein. Es sei etwa α eine positive Zahl und

(72.) $$\frac{\partial F}{\partial y}>0 \text{ für } y\geqq\alpha, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}<0 \text{ für } y\leqq-\alpha.$$

Man überzeugt sich leicht, daß für alle reellen x und y

(73.) $$F(x, y)>A_1 \qquad (A_1=\text{Konstante})$$

ist. Eine Beziehung dieser Art gilt gewiß für alle x und $|y|\leqq\alpha$, da $F(x, y)$ stetig ist. Sie gilt nach (72.) für alle y überhaupt. Es sei

*) Vgl. *S. Bernstein*, Annales de l'École Normale, t. 29, 1912, p. 454.

schließlich bekannt, daß, wie man auch y in dem Intervalle $-\alpha \leqq y \leqq \alpha$ wählt, $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ nicht für alle x verschwindet.

Wir stellen uns die Aufgabe, *unter allen nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetigen, der Beziehung* $y(x+2\pi) = y(x)$ *genügenden Funktionen diejenigen zu bestimmen, die das Integral*

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F(x, y) \right] dx \tag{74.}$$

zum Minimum machen.

Ganz wie in § 1 läßt sich die untere Grenze d des Integrals (74.) bestimmen. Man erhält zugleich eine Folge analytischer, periodischer Funktionen $z^{(n)}(x)$ $(z^{(n)}(x+2\pi) = z^{(n)}(x))$, so daß

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dz^{(n)}}{dx}\right)^2 + F(x, z^{(n)}) \right] dx = \bar{d}_n, \quad \lim_{n=\infty} \bar{d}_n = d$$

ist.

Von der Folge $z^{(n)}(x)$ gehen wir zu einer neuen Folge von Funktionen $y^{(n)}(x)$ über, die nebst ihrer Ableitung erster Ordnung sich stetig verhalten, den beiden Beziehungen

$$y^{(n)}(x+2\pi) = y^{(n)}(x), \qquad |y^{(n)}(x)| \leqq \alpha \tag{75.}$$

genügen und ferner so beschaffen sind, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 + F(x, y^{(n)}) \right] dx = d \tag{76.}$$

ist.

Ist $|z^{(i)}(x)| \leqq \alpha$, so setzen wir

$$y^{(i)}(x) = z^{(i)}(x). \tag{77.}$$

Ist aber $z^{(i)}(x)$ nicht durchweg $\leqq \alpha$, so setzen wir

$$\begin{aligned} \mu^{(i)}(x) &= z^{(i)}(x), \text{ sofern } |z^{(i)}(x)| \leqq \alpha, \\ &= \alpha, \quad \text{wenn } z^{(i)}(x) \geqq \alpha, \\ &= -\alpha, \quad \text{wenn } z^{(i)}(x) \leqq -\alpha. \end{aligned} \tag{78.}$$

Alsdann ist

$$|\mu^{(i)}(x)| \leqq \alpha. \tag{79.}$$

Aus (72.) und (78.) folgt

$$\bar{\bar{d}}_n = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{d\mu^{(i)}}{dx}\right)^2 + F(x, \mu^{(i)}) \right] dx \leqq \bar{d}_n. \tag{80.}$$

Die Funktion $\mu^{(i)}(x)$ ist stetig und genügt der Beziehung

$$\mu^{(i)}(x+2\pi)=\mu^{(i)}(x).$$

Ihre Ableitung erster Ordnung ist abteilungsweise stetig*). Durch „Abrundung der Ecken" gelangt man von $\mu^{(i)}(x)$ zu einer Funktion $y^{(i)}(x)$, die nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetig ist und den Beziehungen

$$y^{(i)}(x+2\pi)=y^{(i)}(x), \quad |y^{(i)}(x)|\leqq\alpha$$

genügt. Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{dy^{(i)}}{dx}\right)^2+F(x,y^{(i)})\right]dx$ kann sich dabei demjenigen des Integrals (80.) beliebig nähern. Man kann sich also so einrichten, daß

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{dy^{(i)}}{dx}\right)^2+F(x,y^{(i)})\right]dx=d_n, \tag{81.}$$

$$\lim_{n=\infty} d_n=d$$

wird.

Offenbar ist für alle hinreichend großen n etwa

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx<d+\tfrac{1}{2}+|A_1|,$$

somit für alle n überhaupt

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx<d_0, \tag{82.}$$

unter d_0 eine positive Zahl verstanden.

Wir setzen

$$y^{(n)}(x)=\bar{x}_0^{(n)}+\sum_i^{1\ldots\infty}\frac{x_i^{(n)}}{i}\sin ix+\sum_i^{1\ldots\infty}\frac{\bar{x}_i^{(n)}}{i}\cos ix. \tag{83.}$$

Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty}[(x_i^{(n)})^2+(\bar{x}_i^{(n)})^2]$$

ist offenbar konvergent. Es ist ferner

$$\pi\sum_i^{1\ldots\infty}[(x_i^{(n)})^2+(\bar{x}_i^{(n)})^2]=\int_0^{2\pi}\left(\frac{dy^{(n)}}{dx}\right)^2 dx<d_0, \tag{84.}$$

daher

$$|x_i^{(n)}|<\sqrt{\frac{d_0}{\pi}}, \quad |\bar{x}_i^{(n)}|<\sqrt{\frac{d_0}{\pi}}. \qquad (i,n=1,2,\ldots) \tag{85.}$$

Endlich ist

---

*) Da $z^{(i)}(x)$ als eine endliche trigonometrische Reihen analytisch ist, so hat $\frac{d\mu^i(x)}{dx}$ nur eine endliche Anzahl Sprungstellen.

$$(86.)\qquad \bar{x}_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y^{(n)}(x)\,dx, \quad |\bar{x}_0^{(n)}| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |y^{(n)}(x)|\,dx < \alpha. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Nunmehr kann man aus $y^{(n)}(x)$ ganz wie in § 2 eine Funktionenfolge

$$(87.)\qquad \eta^{(n)}(x) = \bar{\xi}_0^{(n)} + \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i^{(n)}}{i}\sin ix + \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{\bar{\xi}_i^{(n)}}{i}\cos ix \qquad (n=1,2,\ldots)$$

extrahieren, so daß die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} \bar{\xi}_0^{(n)},\ \lim_{n=\infty} \xi_i^{(n)},\ \lim_{n=\infty} \bar{\xi}_i^{(n)} \qquad (i=1,2,\ldots)$$

existieren. Wir setzen

$$(88.)\quad \lim_{n=\infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \ \ (i=1,2,\ldots), \qquad \lim_{n=\infty} \bar{\xi}_i^{(n)} = \bar{\xi}_i \ \ (i=0,1,2,\ldots).$$

Ganz wie in § 2 läßt sich zeigen, daß die Funktionen $\eta^{(n)}(x)$ gegen die Funktion

$$(89.)\qquad y(x) = \bar{\xi}_0 + \sum_i^{1\ldots\infty} (\xi_i \sin ix + \bar{\xi}_i \cos ix)$$

gleichmäßig konvergieren. Augenscheinlich ist

$$|y(x)| \leqq \alpha.$$

Ebenso beweist man, daß

$$(90.)\qquad \pi \sum_i^{1\ldots\infty} (\xi_i^2 + \bar{\xi}_i^2) + \int_0^{2\pi} F(x,y)\,dx = d$$

ist. Endlich findet man durch Überlegungen, die den in § 2 durchgeführten analog sind, die Beziehungen

$$(91.)\qquad \begin{aligned} 2\pi\xi_l + \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\sin lx\,dx = 0, \\ 2\pi\bar{\xi}_l + \frac{1}{l}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\cos lx\,dx = 0. \end{aligned} \qquad (l=1,2,\ldots)$$

Nach bekannten Sätzen ist die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty}\Big(\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\sin ix\,dx\Big)^2 + \sum_i^{1\ldots\infty}\Big(\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)\cos ix\,dx\Big)^2$$

konvergent. Also konvergiert nach (91.) auch die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty} i^2(\xi_i^2 + \bar{\xi}_i^2).$$

Die unendliche Reihe

$$(92.)\qquad \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i \cos ix - \sum_i^{1\ldots\infty} \bar{\xi}_i \sin ix$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig und stellt offenbar die Funktion $\frac{dy}{dx}$ dar. Wir finden also

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i \cos ix - \sum_{i}^{1\ldots\infty} \bar{\xi}_i \sin ix, \tag{93.}$$

daher

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \pi \sum_{i}^{1\ldots\infty} (\xi_i^2 + \bar{\xi}_i^2). \tag{94.}$$

Die Gleichung (90.) geht über in

$$\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F(x, y)\right] dx = d. \tag{95.}$$

Die Funktion $y(x)$ ist eine Lösung unseres Variationsproblems. Nach bekannten Sätzen der Variationsrechnung hat $y(x)$ stetige Ableitung zweiter Ordnung und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} F(x, y). \tag{96.}$$

Da $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$ nach Voraussetzung für keinen Wert von y in dem Intervalle $-\alpha \leqq y \leqq \alpha$ identisch für alle x verschwindet, so ist die von uns gefundene Lösung keine Konstante.

Ist für alle y in dem Intervalle $-\alpha \leqq y \leqq \alpha$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x, y) > 0,$$

so gibt es auch nur eine periodische $(y(x + 2\pi) = y(x))$ Lösung der Differentialgleichung (96.). Der Beweis wäre genau wie in § 3 zu führen.

Als Beispiele seien die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^3 + \sin x, \tag{97.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^{2n+1} + a_1(x)\, y^{2n} + \cdots + a_{2n+1}(x), \tag{98.}$$

unter $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots 2n+1)$ beliebige der Beziehung $a_i(x + 2\pi) = a_i(x)$ genügende stetige Funktionen verstanden, genannt. In dem Beispiele (97.) kann man für α jede Zahl > 1, in dem Beispiele (98.) eine hinreichend große Zahl setzen. Ist

$$\begin{aligned} a_1(x) = a_3(x) = \cdots = a_{2n+1}(x) = 0, \\ a_2(x) = a_4(x) = \cdots = a_{2n}(x) > 0, \end{aligned} \tag{99.}$$

liegt also eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^{2n+1} + \beta_1(x)\, y^{2n-1} + \beta_2(x)\, y^{2n-3} + \cdots + \beta_n(x)\, y, \quad \beta_i > 0 \quad (i = 1, \ldots n) \tag{100.}$$

vor, so gibt es nur eine nebst ihrer Ableitung erster und zweiter Ordnung stetige, periodische Lösung.

§ 5. Periodische Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = ke^y$.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ke^y, \tag{101.}$$

unter k eine stetige, den Beziehungen

$$k(x+2\pi) = k(x), \qquad k(x) \geqq k_1 > 0 \tag{102.}$$

genügende Funktion verstanden. Es ist leicht zu sehen, daß (101.) keine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, der Beziehung

$$y_0(x+2\pi) = y_0(x) \tag{103.}$$

genügende, also periodische Lösung $y_0(x)$ haben kann. Aus (101.) würde sonst nämlich

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2y_0}{dx^2}\,dx = \int_0^{2\pi} ke^{y_0}\,dx \tag{104.}$$

folgen. Dies ist aber unmöglich, da sich linker Hand Null, rechter Hand eine positive Größe ergibt.

Es sei ξ irgendein Wert in dem Intervalle $0 < x < 2\pi$. *Wir suchen eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung* (101.) *zu bestimmen, die folgende Eigenschaften hat: Sie ist durchweg stetig und genügt der Beziehung $y(x+2\pi) = y(x)$, hat also die Periode 2π. Außer in den Punkten $\xi \pm 2l\pi$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$, sind die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ vorhanden und stetig. Es ist schließlich*

$$\frac{dy(\xi+0)}{dx} - \frac{dy(\xi-0)}{dx} = -h_0,\ h_0 > 0. \tag{105.}$$

Jetzt ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \frac{dy(2\pi)}{dx} - \frac{dy(\xi+0)}{dx} + \frac{dy(\xi-0)}{dx} - \frac{dy(0)}{dx} = h_0,$$

so daß aus (101.)

$$\int_0^{2\pi} k(x)\,e^{y(x)}\,dx = h_0$$

folgen wird. Diese Gleichung führt zunächst auf keinen Widerspruch. Es sei jetzt $v(x)$ irgendeine stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{h_0}{2\pi}, \tag{106.}$$

die überdies folgende Eigenschaften hat: Außer in dem Punkte ξ hat sie stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Es ist ferner

$$\frac{d}{dx}v(\xi+0)-\frac{d}{dx}v(\xi-0)=-h_0. \tag{107.}$$

Lösungen dieser Art sind gewiß vorhanden. Ist $v(x)$ eine Lösung, so ist $v(x)+$ Const. ebenfalls eine. Die additive Konstante kann man etwa so bestimmen, daß

$$\int_0^{2\pi} v\,dx = 0$$

wird. Die in dieser Weise normierte Lösung $v(x)$ ist weiter nichts als die mit h_0 multiplizierte zu den Randbedingungen

$$v(x+2\pi)=v(x),\quad \frac{d}{dx}v(2\pi)=\frac{d}{dx}v(0)$$

gehörige *Green*sche Funktion „im weiteren Sinne" der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Wir setzen

$$y(x)=v(x)+Y(x) \tag{108.}$$

und erhalten zur Bestimmung der nebst ihrer Ableitung erster und zweiter Ordnung stetigen, der Beziehung

$$Y(x+2\pi)=Y(x) \tag{109.}$$

genügenden Funktion $Y(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+\frac{h_0}{2\pi}=ke^ve^Y. \tag{110.}$$

Auf dieselbe Differentialgleichung führt nun das folgende Variationsproblem:

Es ist unter allen nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetigen, der Beziehung (109.) genügenden Funktionen $Y(x)$ diejenige zu bestimmen, die das Integral

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dY}{dx}\right)^2-\frac{h_0Y}{2\pi}+ke^ve^Y\right]dx \tag{111.}$$

zum Minimum macht.

Es ist nun leicht zu sehen, daß die Funktion

$$F(x,Y)=ke^ve^Y-\frac{h_0Y}{2\pi} \tag{112.}$$

bei einer geeigneten Wahl der Größe α allen der in § 4 ebenso bezeichneten Funktion auferlegten Bedingungen genügt. Es ist nämlich zunächst

$$F(x+2\pi,Y)=F(x,Y).$$

Ferner ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial Y} F(x, Y) = ke^{v}e^{Y} - \frac{h_0}{2\pi} \tag{113.}$$

augenscheinlich für alle x positiv, wenn $Y \geqq \alpha$, negativ, wenn $Y \leqq -\alpha$ ist, unter α eine hinreichend große positive Zahl verstanden. Da

$$\frac{\partial^2}{\partial Y^2} F(x, Y) > 0$$

ist, so ist die Lösung Y, somit auch die gesuchte periodische Lösung der Differentialgleichung (101.) eindeutig bestimmt.

§ 6. Ein isoperimetrisches Problem.

Es sei $f_1(x, y)$ eine für alle x in dem Intervalle $(0, \pi)$ und alle reellen y nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in bezug auf y stetige Funktion. *Wir suchen unter allen der Gleichung*

$$\int_0^{\pi} f_1(x, y)\, dx = 1 \tag{114.}$$

genügenden, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung in $(0, \pi)$ *stetigen, für* $x = 0$ *und* $x = \pi$ *verschwindenden Funktionen diejenigen zu bestimmen, die das Integral*

$$\int_0^{\pi} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f(x, y)\right] dx \tag{115.}$$

zum Minimum machen. Unter $f(x, y)$ wird hierbei die in § 1 erklärte Funktion verstanden*).

Die Betrachtung verläuft derjenigen in § 2 im wesentlichen parallel. Sie bedarf nur an einigen Stellen einer Ergänzung.

Die Vergleichsfunktionen

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i}^{1 \ldots \infty} \frac{x_i^{(n)}}{i} \sin ix \tag{116.}$$

haben im vorliegenden Falle die Bedingung

$$\int_0^{\pi} f_1(x, y^{(n)})\, dx = 1 \tag{117.}$$

zu erfüllen**). Die Funktion

---

*) Allgemeiner könnte man $y(0) = Y_0$, $y(\pi) = Y_1$ setzen, unter Y_0 und Y_1 beliebige reelle Werte verstanden. Dieser Fall läßt sich indessen wie in § 1 auf den im Text betrachteten ohne weiteres zurückführen.

**) Es wird natürlich vorausgesetzt, daß es unendlichviele Vergleichsfunktionen gibt.

$$(118.) \qquad y(x) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i}{i} \sin ix,$$

gegen die $\eta^{(n)}(x)\,(n = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig konvergieren, erfüllt die Bedingung

$$(119.) \qquad \int_0^{\pi} f_1(x, y)\, dx = 1.$$

Wie in § 2 sieht man, daß jedenfalls

$$(120.) \qquad \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i^2 + \int_0^{\pi} f(x, y)\, dx \leqq d$$

ist. Um zu zeigen, daß auch jetzt

$$(121.) \qquad \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i^2 + \int_0^{\pi} f(x, y)\, dx = d$$

ist, verfahren wir wie folgt.

Es sei im Gegensatz zu unserer Behauptung

$$(122.) \qquad \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i^2 + \int_0^{\pi} f(x, y)\, dx < d.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(123.) \qquad \sum_{i}^{1\ldots\mu} \frac{\xi_i}{i} \sin ix = y_\mu(x).$$

Da

$$(124.) \qquad \lim_{\mu=\infty} \int_0^{\pi} f(x, y_\mu)\, dx = \int_0^{\pi} f(x, y)\, dx$$

ist, so kann man eine Zahl λ so groß wählen, daß für alle $\mu > \lambda$

$$(125.) \qquad \int_0^{\pi} \left(\frac{dy_\mu}{dx}\right)^2 dx + \int_0^{\pi} f(x, y_\mu)\, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{i}^{1\ldots\mu} \xi_i^2 + \int_0^{\pi} f(x, y_\mu)\, dx < d - \sigma$$

wird, unter σ einen hinreichend kleinen positiven Wert verstanden.

Offenbar ist

$$(126.) \qquad \int_0^{\pi} f_1(x, y_\mu)\, dx = 1 - \sigma_\mu, \quad \lim_{\mu=\infty} \sigma_\mu = 0.$$

Es sei $\gamma(x)$ irgendeine in $(0, \pi)$ nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Funktion, ε_0 eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine Zahl. Setzt man

$$(127.) \qquad y_\mu + \varepsilon_0 \gamma = Y_\mu,$$

so erhält man

$$\int_0^\pi f_1(x, Y_\mu)\,dx = \int_0^\pi f_1(x, y_\mu)\,dx + \varepsilon_0 \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y_\mu)\gamma\,dx \tag{128.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2 \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_1(x, y_\mu + \theta_1 \varepsilon\gamma)\gamma^2\,dx,\quad 0 < \theta_1(x) < 1.$$

Wir wählen $\gamma(x)$ so, daß

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)\gamma\,dx = s \neq 0 \tag{129.}$$

ist*). Dann ist für alle hinreichend großen μ, etwa $\mu > \lambda_1 \geqq \lambda$,

$$\left| \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y_\mu)\gamma\,dx \right| = |s_\mu| > s_0 > 0. \tag{130.}$$

Wir wählen nun ε_0 so, daß

$$\int_0^\pi f_1(x, Y_\mu)\,dx = 1 \tag{131.}$$

wird. Aus (128.) erhält man zur Bestimmung von ε_0 die quadratische Gleichung

$$\sigma_\mu = \varepsilon_0 s_\mu + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2 \int_0^\pi \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_1(x, y_\mu + \theta_1 \varepsilon\gamma)\gamma^2\,dx. \tag{132.}$$

Diese Gleichung hat für hinreichend kleine $|\sigma_\mu|$, wie man leicht sieht, eine reelle Wurzel, die zugleich mit σ_μ gegen Null konvergiert. Wie aus (125.) und (127.) aus Stetigkeitsgründen folgt, kann man μ so groß, etwa $\mu > \lambda_2 \geqq \lambda_1 \geqq \lambda$, darum σ_μ und daher auch ε_0 so klein wählen, daß der Ausdruck

$$\int_0^\pi \left[\left(\frac{dY_\mu}{dx}\right)^2 + f(x, Y_\mu)\right] dx$$

immer noch kleiner als d wird. Dies wäre aber angesichts der Gleichung (131.) ein Widerspruch, da doch d die untere Grenze der Werte des Integrals (115.) unter der Nebenbedingung (114.) ist.

Es ist also

$$\frac{\pi}{2} \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i^2 + \int_0^\pi f(x, y)\,dx = d, \tag{133.}$$

$$\int_0^\pi f_1(x, y)\,dx = 1. \tag{134.}$$

Um nachzuweisen, daß die Funktion

$$y(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{\xi_i}{i} \sin ix \tag{135.}$$

stetige Ableitung erster Ordnung hat, verfahren wir jetzt wie folgt.

*) Wir nehmen an, daß (129.) nicht für alle γ verschwindet, d. h. daß die erste Variation des Integrals (114.) von Null verschieden ist.

Es sei $\zeta(x)$ irgendeine nebst ihrer partiellen Ableitung erster Ordnung stetige, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende Funktion:

$$\zeta(x)=\sum_{i}^{1\ldots\infty}\frac{\zeta_i}{i}\sin ix. \tag{136.}$$

Es sei $\tau(x)$ eine beliebig gewählte, dann aber festzuhaltende, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende Funktion derart, daß

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)\,\tau(x)\,dx \neq 0 \tag{137.}$$

ist. Es seien ε und ω dem absoluten Betrage nach beliebig kleine, sonst willkürliche Werte. Setzt man

$$\tau(x)=\sum_{i}^{1\ldots\infty}\frac{\tau_i}{i}\sin ix, \quad Y(x)=y(x)+\varepsilon\zeta(x)+\omega\tau(x), \tag{138.}$$

so kann man in bekannter Weise ω als Funktion von ε so bestimmen, daß für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen ε, etwa $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, identisch in ε

$$\int_0^\pi f_1(x, Y)\,dx=1 \tag{139.}$$

wird. Die Funktion $\omega=\omega(\varepsilon)$ verschwindet mit ε. Ferner ist

$$\left(\frac{d\omega}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=-\frac{\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)\zeta\,dx}{\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y)\tau\,dx}. \tag{140.}$$

Es ist nun gewiß, sofern $|\varepsilon|<\varepsilon_1$ ist,

$$\frac{\pi}{2}\sum_{i}^{1\ldots\infty}[\xi_i+\varepsilon\zeta_i+\omega\tau_i]^2+\int_0^\pi f(x, y+\varepsilon\zeta(x)+\omega\tau(x))\,dx \geqq d. \tag{141.}$$

Wäre nämlich der Ausdruck linker Hand $<d$, so könnte man ganz wie vorhin eine nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende Funktion angeben, die dem Integral (114.) den Wert 1, dem Integral (115.) aber einen Wert $<d$ erteilen würde.

Aus (133.) und (141.) ergibt sich

$$\pi\varepsilon\sum_{i}^{1\ldots\infty}\xi_i\zeta_i+\pi\omega(\varepsilon)\sum_{i}^{1\ldots\infty}\xi_i\tau_i+\varepsilon\int_0^\pi\frac{\partial f}{\partial y}\zeta\,dx+\omega(\varepsilon)\int_0^\pi\frac{\partial f}{\partial y}\tau\,dx+((\varepsilon^2))\geqq 0, \tag{142.}$$

und hieraus in bekannter Weise mit Rücksicht auf (140.)

$$(143.)\quad \pi \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i\zeta_i - \pi \frac{\sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i\tau_i}{\int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\tau\,dx} \int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\zeta\,dx + \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial y}\zeta\,dx - \frac{\int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial y}\tau\,dx}{\int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\tau\,dx} \int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\zeta\,dx = 0.$$

Setzen wir zur Vereinfachung

$$(144.)\qquad \frac{\sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i\tau_i}{\int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\tau\,dx} = \lambda', \qquad \frac{\int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial y}\tau\,dx}{\int_0^\pi \frac{\partial f_1}{\partial y}\tau\,dx} = \lambda'';$$

λ' und λ'' sind bekannte Größen.

Es ist jetzt

$$(145.)\qquad \pi \sum_{i}^{1\ldots\infty} \xi_i\zeta_i = \int_0^\pi \left\{(\pi\lambda' + \lambda'')\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right\}\zeta\,dx.$$

Diese Beziehung gilt für alle nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetigen, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindenden Funktionen $\zeta(x)$. Setzt man daher für $\zeta(x)$ insbesondere die Funktion

$$(146.)\qquad \frac{\zeta_i \sin ix}{i}$$

ein, so findet man

$$(147.)\qquad \pi i\xi_i = \int_0^\pi \left\{(\pi\lambda' + \lambda'')\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\right\}\sin ix\,dx.$$

Hieraus folgt wieder wie in § 3, daß

$$(148.)\qquad \sum_{i}^{1\ldots\infty} i^2\xi_i^2$$

konvergiert und daß daher die Funktion $y(x)$ stetige Ableitung erster Ordnung hat.

Die weitere Betrachtung bietet keine Schwierigkeiten.

Kapitel II. Zweidimensionale Variationsprobleme. Die erste Randwertaufgabe.

§ 1. Problemstellung und vorbereitende Betrachtungen.

Es sei T ein von einer endlichen Anzahl geschlossener, regulär analytischer Kurven $S_1, S_2, \ldots S_m$ begrenztes m-fach zusammenhängendes endliches Gebiet in der Ebene der Variabeln x und y. Die gesamte Berandung des Gebietes T bezeichnen wir der Kürze halber mit S. Es sei $P(x, y, u)$ eine für alle (x, y) in T und auf S und alle reellen u erklärte Funktion, die folgende Eigenschaften hat: Sie ist für alle (x, y) in T

und auf S und alle endlichen u nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig. Es ist ferner

$$(1.) \qquad P(x, y, u) > 0,$$

$$(2.) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u)\right| < A_2, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x, y, u)\right| < A_2,$$

unter A_2 eine positive Konstante verstanden.

Wir stellen uns die Aufgabe, *unter allen in T und auf S stetigen, auf S verschwindenden Funktionen, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in T abteilungsweise stetig sind und deren Dirichletsches Integral*

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

existiert, diejenigen zu bestimmen, die das Doppelintegral

$$(3.) \qquad I_2 = \iint_T \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + P(x, y, u)\right\} dx\, dy$$

zum Minimum machen.

Die weiteren Entwicklungen stützen sich auf einige Sätze, deren Beweis an dieser Stelle unterbleiben kann.

Wir betrachten die in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen, auf S verschwindenden Eigenfunktionen $\omega_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0.$$

Es seien λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ die zugehörigen Eigenwerte. Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen lassen sich in bekannter Weise folgende Sätze ableiten:

Die Eigenwerte λ_i sind positiv. Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$$

konvergiert. Die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1\ldots\infty} \frac{[\omega_i(x, y)]^2}{\lambda_i^2}$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Ist $u_0(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion, so ist

$$(4.) \qquad \iint_T [u_0(x, y)]^2 dx\, dy = \sum_i^{1\ldots\infty} \left[\iint_T u_0(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right]^2.$$

Jede nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ in T

und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion $\bar{u}(x, y)$ läßt sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$(5.) \qquad \bar{u}(x, y) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \omega_i(x, y) \iint_T \bar{u}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

entwickeln*). Die unendliche Reihe

$$\sum_{i}^{1\ldots\infty} \lambda_i^2 \Big(\iint_T \bar{u}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \Big)^2$$

konvergiert**). In der Tat ist

$$\iint_T \bar{u}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\lambda_i} \iint_T \bar{u}(\xi, \eta) \Big(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \eta^2} \Big) d\xi\, d\eta$$

$$= -\frac{1}{\lambda_i} \iint_T \Big(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \Big) \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

daher

$$(6.) \qquad \sum_{i}^{1\ldots\infty} \lambda_i^2 \Big(\iint_T \bar{u}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \Big)^2 = \iint_T \Big(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \Big)^2 d\xi\, d\eta.$$

Es sei $\bar{v}(x, y)$ eine andere in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}$ stetige, auf S verschwindende Funktion:

$$\bar{v}(x, y) = \sum_{i}^{1\ldots\infty} \omega_i(x, y) \iint_T \bar{v}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Es ist

$$\iint_T \Big(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \Big) dx\, dy = -\iint_T \Big(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \Big) \bar{v}(x, y)\, dx\, dy$$

$$= -\sum_{i}^{1\ldots\infty} \iint_T \Big(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \Big) \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint_T \bar{v}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= -\sum_{i}^{1\ldots\infty} \iint_T \bar{u}(\xi, \eta) \Big(\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial \eta^2} \Big) d\xi\, d\eta \iint_T \bar{v}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

$$= \sum_{i}^{1\ldots\infty} \lambda_i \iint_T \bar{u}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint_T \bar{v}(\xi, \eta)\, \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Insbesondere ergibt sich, wenn $\bar{u}(x, y)$ gleich $\bar{v}(x, y)$ gesetzt wird,

---

*) Es genügt übrigens vorauszusetzen, daß die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sich im Innern von T stetig verhalten, während die Ausdrücke $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$ und $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ auch noch auf S stetig sind. Vgl. die analogen Entwicklungen in § 1 des III. Kapitels.

**) Vgl. die vorhergehende Fußnote.

$$(7.)\quad \iint_T \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \sum_i^{1\ldots\infty} \lambda_i \left(\iint_T \bar{u}(\xi,\eta)\,\omega_i(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right)^2 *).$$

§ 2. Fortsetzung.

Es sei ν_i $(i=1,2,\ldots)$ irgendeine unendliche Folge reeller Zahlen mit konvergenter Quadratsumme. Wir setzen

$$(8.)\qquad u_n(x,y)=\sum_i^{1\ldots n} \frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,\omega_i(x,y),$$

$$(9.)\qquad \iint_T P(x,y,u_n(x,y))\,dx\,dy = M(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n)=M_n$$

und beweisen, daß

$$\lim_{n=\infty} M(\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_n)=\lim_{n=\infty} M_n$$

existiert. In der Tat ist

$$M_{n+p}-M_n=\iint_T \frac{P(x,y,u_{n+p})-P(x,y,u_n)}{u_{n+p}-u_n}(u_{n+p}-u_n)\,dx\,dy,$$

daher

$$|M_{n+p}-M_n|^2<\iint_T \left[\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u_n+\theta_2(x,y)(u_{n+p}-u_n))\right]^2 dx\,dy\cdot$$

$$\iint_T [u_{n+p}(x,y)-u_n(x,y)]^2\,dx\,dy,\quad 0<\theta_2(x,y)<1,$$

oder, wenn τ den Flächeninhalt des Gebietes T bezeichnet,

$$(10.)\quad |M_{n+p}-M_n|<A_2\tau^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i>n}\frac{\nu_i^2}{\lambda_i}\right]^{\frac{1}{2}}<A_2\tau^{\frac{1}{2}}\left[\sum_i^{1\ldots\infty}\nu_i^4\sum_{i>n}\frac{1}{\lambda_i^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Der Ausdruck rechts konvergiert mit unendlich wachsendem n für alle der Ungleichheitsbedingung

$$(11.)\qquad \sum_i^{1\ldots\infty}\nu_i^2\leqq 1$$

genügenden ν_i $(i=1,2,\ldots)$ gleichmäßig gegen Null.

Wir setzen

$$(12.)\qquad \lim_{n=\infty} M(\nu_1,\ldots\nu_n)=M(\nu_1,\nu_2,\ldots)=M(\nu)$$

und fassen $M(\nu)$ als eine Funktion der unendlichvielen Variabeln ν_i $(i=1,2,\ldots)$ auf. Aus (10.) und (12.) folgt

$$(13.)\qquad |M(\nu)-M_n|<A_2\tau^{\frac{1}{2}}\left[\sum_i^{1\ldots\infty}\nu_i^4\sum_{i>n}\frac{1}{\lambda_i^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

*) Vgl. die Fußnote *) S. 53.

Der Ausdruck rechts nähert sich mit unendlich wachsendem n für alle der Beziehung (11.) genügenden ν_i $(i = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig dem Werte Null. Hieraus folgt nun in bekannter Weise, daß *die Funktion* $M(\nu)$ *vollstetig ist.* Sind $\frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ *Fourier*sche Koeffizienten einer stetigen Funktion $u(x, y)$, ist beispielsweise $\sum_{i}^{1\ldots\infty} \frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}} \omega_i(x, y) = u(x, y)$ gleichmäßig konvergent, so ist

$$M(\nu) = \iint_T P(x, y, u(x, y))\, dx\, dy.$$

In der Tat ist zunächst nach (12.)

$$\lim_{n=\infty} M(\nu_1, \ldots \nu_n) = M(\nu).$$

Es ist ferner

$$\delta_n = \iint_T P(x, y, u(x, y))\, dx\, dy - \iint_T P(x, y, u_n(x, y))\, dx\, dy$$

$$= \iint_T \frac{P(x, y, u) - P(x, y, u_n)}{u - u_n} (u - u_n)\, dx\, dy,$$

somit wie vorhin

$$\delta_n^2 < A_2^2 \tau \iint_T (u - u_n)^2\, dx\, dy = A_2^2 \tau \sum_{i>n} \frac{\nu_i^2}{\lambda_i}, \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

daher endgültig

$$M(\nu) = \iint_T P(x, y, u(x, y))\, dx\, dy.$$

Wir wenden uns jetzt unserem eigentlichen Probleme zu. Die Aufgabe sei bereits gelöst, und es sei $u(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in T abteilungsweise stetig sind, deren *Dirichlet*sches Integral

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

existiert, und die das Doppelintegral (3.) zum Minimum macht. Man beweist ohne wesentliche Schwierigkeiten, daß $u(x, y)$ im Innern von T stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\text{(14.)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u)$$

genügt. Ist $G(x_0, y_0; x, y)$ die zu T gehörige in (x_0, y_0) wie

$$-\tfrac{1}{2}\log\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}$$

unendliche klassische *Green*sche Funktion, so ist ferner

$$(15.)\quad u(x_0,y_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_T G(x_0,y_0;x,y)\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u(x,y))\,dx\,dy.$$

Es sei nämlich T' ein von geschlossenen, regulär analytischen Kurven S' begrenztes Gebiet im Innern von T. Es sei $\bar{v}'(x,y)$ irgendeine in T' und auf S' stetige, auf S' verschwindende Funktion, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in T' und auf S' abteilungsweise stetig sind. Aus der Minimaleigenschaft der Funktion $u(x,y)$ folgt sofort

$$\iint_{T'}\left\{2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\bar{v}'}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\bar{v}'}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u)\,\bar{v}'\right\}dx\,dy=0.$$

Es sei (x_0,y_0) ein Punkt im Innern von T' und $G'(x_0,y_0;x,y)$ die zu T' gehörige klassische *Green*sche Funktion. Es sei ferner γ' eine beliebig große positive Zahl, C' die Kurve

$$G'(x_0,y_0;x,y)=\gamma',$$

K' das von C' begrenzte endliche Gebiet.

Wir wählen speziell

$$\begin{aligned}\bar{v}'(x,y)&=G'(x_0,y_0;x,y)\ \text{ in }\ T'-K',\\ &=\gamma'\qquad\qquad\quad\ \text{ in }\ K'\end{aligned}$$

und erhalten nach einer teilweisen Integration und dem Übergang zur Grenze $\gamma'=\infty$ in bekannter Weise

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{S'}\frac{\partial}{\partial n}G'(x_0,y_0;x,y)\,u(x,y)\,ds$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{T'}G'(x_0,y_0;x,y)\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u(x,y))\,dx\,dy.$$

Läßt man jetzt S' in S übergehen, so erhält man in der Tat

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_T G(x_0,y_0;x,y)\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u(x,y))\,dx\,dy,$$

woraus zunächst folgt, daß $u(x_0,y_0)$ im Innern von T stetige Ableitungen erster, sodann solche zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung (14.) genügt. Aus der Formel (15.) folgt nach den Sätzen der Potentialtheorie aber weiter, daß $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch noch auf S stetig sind. Es genügt daher unter den zum Vergleich zugelassenen Funktionen $u(x,y)$

nur diejenigen zu betrachten, deren partielle Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in T und auf S stetig sind*).

§ 3. Auflösung des Variationsproblems.

Es sei d die untere Grenze des Doppelintegrals (3.) und $u^{(n)}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von Vergleichsfunktionen, die so beschaffen sind, daß

$$(16.) \qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2 + P(x, y, u^{(n)})\right] dx\,dy = d_n,$$

$$(17.) \qquad \lim_{n=\infty} d_n = d$$

ist.

Zur wirklichen Bestimmung des Wertes d und der Funktionen $u^{(n)}(x, y)$ kann man sich wieder des in I § 1 auseinandergesetzten Verfahrens bedienen. Offenbar ist

$$(18.) \qquad \iint_T \left\{\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy < d_n,$$

somit für alle n

$$(19.) \qquad \iint_T \left\{\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy < d_0,$$

unter d_0 eine positive Zahl verstanden. Setzt man

$$(20.) \qquad u^{(n)}(x, y) = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{\nu_i^{(n)}}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x, y),$$

so ist nach (7.) und (19.)

$$(21.) \qquad \iint_T \left\{\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \sum_i^{1\ldots\infty} (\nu_i^{(n)})^2 < d_0.$$

---

*) Daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung des Integrals (15.) auf S stetig sind, ist ein bekanntes Resultat (vgl. z. B. *Picard*, Journal de Mathématiques (5), t. 6, 1900, p. 130 u. ff., woselbst auf *Paraf* verwiesen wird). Der die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung betreffende Satz ist weniger bekannt. (Vgl. *A. Korn*, Über Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen, Abh. d. Kgl. Preuß. Akademie, 1909, S. 31 u. 32). Man kann indessen diesen Satz ganz entbehren, wenn man die Fußnote *) S. 53 beachtet. Es genügt dann den zum Vergleich zugelassenen Funktionen $u(x, y)$ folgende Bedingungen aufzuerlegen: Sie sollen in T und auf S stetig sein, auf S verschwinden und in T stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen haben. Die Ausdrücke $\frac{\partial u}{\partial n}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sollen überdies auch noch auf S stetig sein.

Von der unendlichen Doppelfolge $\nu_i^{(n)}$ ausgehend, kann man nun ganz wie in I § 2 eine Wertfolge $\mu_i (i = 1, 2, \ldots)$ ableiten, so daß $\sum_i^{1 \ldots \infty} \mu_i^2$ konvergiert und überdies

$$\sum_i^{1 \ldots \infty} \mu_i^2 + M(\mu) = d \tag{22.}$$

ist.

Wir setzen jetzt*)

$$\iint_T \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u_n)\, \omega_i(x, y)\, dx dy = N^{(i)}(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n) = N_n^{(i)}. \tag{23.}$$

Wie in § 2 kann man zeigen, daß $\lim_{n=\infty} N_n^{(i)}$ existiert und

$$N^{(i)}(\nu_1, \nu_2, \ldots) = N^{(i)}(\nu) = \lim_{n=\infty} N^{(i)}(\nu_1, \ldots \nu_n) \tag{24.}$$

eine *vollstetige* Funktion der unendlichvielen Variabeln $\nu_i (i = 1, 2, \ldots)$ darstellt. Sind die Werte $\frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ *Fourier*sche Koeffizienten einer stetigen Funktion $u(x, y)$, ist beispielsweise die unendliche Reihe

$$\sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x, y) = u(x, y)$$

gleichmäßig konvergent, so ist

$$N^{(i)}(\nu) = \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u)\, \omega_i(x, y)\, dx dy.$$

Es sei jetzt ε eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine, sonst willkürliche Zahl. Offenbar ist

$$\mu_1^2 + \cdots + \mu_{l-1}^2 + (\mu_l + \varepsilon)^2 + \cdots + \mu_n^2 + M(\mu_1, \ldots \mu_{l-1}, \mu_l + \varepsilon, \mu_{l+1}, \ldots \mu_n) \geqq d,$$

daher für $n = \infty$

$$\mu_1^2 + \cdots + \mu_{l-1}^2 + (\mu_l + \varepsilon)^2 + \mu_{l+1}^2 + \cdots + M(\mu_1, \ldots \mu_{l-1}, \mu_l + \varepsilon, \mu_{l+1}, \ldots) \geqq d, \tag{25.}$$

somit

$$2\varepsilon\mu_l + \varepsilon^2 + M(\mu_1, \ldots \mu_{l-1}, \mu_l + \varepsilon, \mu_{l+1}, \ldots) - M(\mu_1, \ldots \mu_{l-1}, \mu_l, \mu_{l+1}, \ldots) \geqq 0. \tag{26.}$$

Es ist nun für alle $n > l$, wenn wir

$$\sum_i^{1 \ldots n} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x, y) = U_n(x, y)$$

setzen,

---

*) Vgl. die Formeln (8.) und (9.).

$$M(\mu_1, \dots \mu_{l-1}, \mu_l + \varepsilon, \mu_{l+1}, \dots \mu_n) - M(\mu_1, \dots \mu_{l-1}, \mu_l, \mu_{l+1}, \dots \mu_n)$$

$$= \iint_T \Big[P\Big(x, y, U_n(x, y) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_l}}\, \omega_l(x, y)\Big) - P\big(x, y, U_n(x, y)\big) \Big] dx dy$$

(27.)

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_l}} \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, U_n(x, y)\big)\, \omega_l(x, y)\, dx dy$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2\lambda_l} \iint_T \frac{\partial^2}{\partial u^2} P\Big(x, y, U_n(x, y) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_l}} \theta_3(x, y)\, \omega_l(x, y)\Big)\, \omega_l^2(x, y)\, dx dy,$$

$$0 < \theta_3(x, y) < 1.$$

Geht man zur Grenze $n = \infty$ über, so folgt hieraus augenscheinlich

$$M(\mu_1, \dots \mu_{l-1}, \mu_l + \varepsilon, \mu_{l+1}, \dots) - M(\mu_1, \dots \mu_{l-1}, \mu_l, \mu_{l+1}, \dots)$$

(28.)

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_l}} N^{(l)}(\mu) + \varepsilon^2 L(\mu, \varepsilon),$$

$$|L(\mu, \varepsilon)| < \frac{A_2}{2\lambda_l} \iint_T \omega_l^2(x, y)\, dx dy < A_3,$$

unter A_3 eine positive Zahl verstanden.

Aus (26.) und (28.) ergeben sich nun in bekannter Weise die unendlichvielen Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten:

(29.)
$$2\mu_l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} N^{(l)}(\mu) = 0. \qquad (l = 1, 2, \dots)$$

Es sei wie vorhin (x_0, y_0) irgendein Punkt im Innern von T. Wir setzen

(30.)
$$V_n(x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T G(x_0, y_0; x, y)\, \frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, U_n(x, y)\big) dx dy.$$

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt ohne Schwierigkeit, daß $V_n(x_0, y_0)$ sich für alle (x_0, y_0) in T und auf S mit wachsendem n gleichmäßig einem Grenzwerte nähert. Es sei

$$V(x_0, y_0) = \lim_{n=\infty} V_n(x_0, y_0).$$

$V(x_0, y_0)$ ist eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion. Wir finden weiter

$$\iint_T V(x_0, y_0)\, \omega_l(x_0, y_0)\, dx_0 dy_0 = \lim_{n=\infty} \iint_T V_n(x_0, y_0)\, \omega_l(x_0, y_0)\, dx_0 dy_0$$

$$= -\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \iint_T \Big[\frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, U_n(x, y)\big) dx dy \iint_T G(x_0, y_0; x, y)\, \omega_l(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \Big],$$

oder da

$$\omega_l(x, y) = \frac{\lambda_l}{2\pi} \iint_T G(x, y; x_0, y_0)\, \omega_l(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

ist, auch

$$\iint_T V(x_0, y_0)\,\omega_l(x_0, y_0)\,dx_0 dy_0$$

(31.)
$$= -\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\lambda_l} \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, U_n(x, y))\,\omega_l(x, y)\,dx dy = -\frac{1}{2\lambda_l} N^{(l)}(\nu) = \frac{\mu_l}{\sqrt{\lambda_l}}.$$

Die Werte $\frac{\mu_l}{\sqrt{\lambda_l}}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ sind also *Fourier*sche Koeffizienten der auf S verschwindenden stetigen Funktion $V(x, y)$.

Setzt man jetzt

(32.) $$W(x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T G(x_0, y_0; x, y)\,\frac{\partial}{\partial u} P(x, y, V(x, y))\,dx dy,$$

so findet man in ähnlicher Weise für die *Fourier*schen Koeffizienten der stetigen am Rande verschwindenden Funktion $W(x_0, y_0)$ die Werte

$$\iint_T W(x_0, y_0)\,\omega_l(x_0, y_0)\,dx_0 dy_0$$

(33.)
$$= -\frac{1}{2\lambda_l} \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, V(x, y))\,\omega_l(x, y)\,dx dy = -\frac{1}{2\lambda_l} N^{(l)}(\nu) = \frac{\mu_l}{\sqrt{\lambda_l}}.$$

Nach bekannten Sätzen ist also in T und auf S

(34.) $$W(x, y) = V(x, y),$$

folglich

(35.) $$V(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T G(x, y; \xi, \eta)\,\frac{\partial}{\partial u} P(\xi, \eta, V(\xi, \eta))\,d\xi d\eta.$$

Die Funktion $V(x, y)$ hat in T und auf S stetige Ableitungen erster Ordnung. Da nunmehr der Ausdruck $\frac{\partial}{\partial u} P(\xi, \eta, V(\xi, \eta))$ gleichfalls stetige Ableitungen erster Ordnung hat, so hat $V(x, y)$ in T und auf S stetige Ableitungen zweiter Ordnung und genügt der Differentialgleichung

(36.) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u).$$

Die Funktion $V(x, y)$ ist eine Lösung des eingangs gestellten Variationsproblems. Es ist

$$V(x, y) = \sum_{i}^{1 \ldots \infty} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,\omega_i(x, y).$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Sie ist gewiß nicht identisch gleich Null, wenn $\frac{\partial}{\partial u} P(x, y, 0)$ nicht identisch verschwindet.

Ist $\frac{\partial^2}{\partial u^2} P(x, y, u) > 0$, so ist die Lösung eindeutig. Der Beweis wäre wie in I § 3 zu führen.

In diesem Falle konvergiert die Folge $\nu_i^{(n)}$ für alle i gegen μ_i,

$$\lim_{n=\infty} \iint_T u^{(n)}(x, y)\, \omega_i(x, y)\, dx\, dy = \iint_T V(x, y)\, \omega_i(x, y)\, dx\, dy.$$

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß $u(x, y)$ auf S verschwindet. Der allgemeinere Fall, wenn die Lösung auf dem Rande eine vorgeschriebene, regulär analytische Wertfolge annimmt, läßt sich in bekannter Weise durch eine geeignete Substitution auf den vorerwähnten zurückführen. Die Randwerte brauchen auch nicht notwendig analytisch zu sein, doch wollen wir uns bei diesen Einzelheiten nicht weiter aufhalten.

§ 4. Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(x, y)\, e^u.$$

Es sei $k(x, y)$ eine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige *positive* Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, *unter allen in T und auf S stetigen, auf S verschwindenden Funktionen $u(x, y)$, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in T abteilungsweise stetig sind und deren Dirichletsches Integral*

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy$$

existiert, diejenige zu bestimmen, die das Doppelintegral

$$I_3 = \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2ke^u\right] dx\, dy \tag{37.}$$

zum Minimum macht. Wie in II § 2 läßt sich zeigen, daß, falls das Problem eine Lösung $u(x, y)$ hat, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in T und auf S stetig sind. Es genügt daher, als Vergleichsfunktionen lediglich Funktionen $u(x, y)$ zuzulassen, die nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in T und auf S stetig sind und auf S verschwinden*).

Es sei d die untere Grenze des Doppelintegrals (37.) und $z^{(n)}(x, y)$ ($n = 1, 2, \ldots$) eine Folge von Vergleichsfunktionen, die so beschaffen sind, daß

*) Die Bemerkung in der Fußnote *) S. 57 gilt unverändert bei dem jetzt betrachteten Variationsproblem.

$$(38.)\qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}\right)^2+2ke^{z^{(n)}}\right]dxdy=\bar{d}_n,$$

$$(39.)\qquad \lim_{n=\infty}\bar{d}_n=d$$

ist.

Zur wirklichen Bestimmung des Grenzwertes d und einer Folge $z^{(n)}(x,y)$ $(n=1,2,\ldots)$ bedienen wir uns wieder des in I § 1 auseinandergesetzten Verfahrens.

Von der Folge $z^{(n)}(x,y)$ gehen wir zu einer neuen Folge von Vergleichsfunktionen $u^{(n)}(x,y)$ über, die der Bedingung $u^{(n)}(x,y)\leqq 0$ genügen und überdies so beschaffen sind, daß

$$(40.)\qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2+2ke^{u^{(n)}}\right]dxdy=d_n,$$

$$(41.)\qquad \lim_{n=\infty}d_n=d$$

ist. Wir verfahren hierbei ähnlich wie in I § 4 und benutzen den Umstand, daß, wenn in einem zusammenhängenden Teile des Gebietes T die Funktion $z^{(n)}(x,y)>0$ ist, das Integral (38.) verkleinert wird, wenn man in jenem Teilgebiete $z^{(n)}(x,y)$ durch den Wert Null ersetzt. Da alle $z^{(n)}(x,y)$ analytisch sind, ist die Anzahl solcher Gebiete gewiß endlich. An jedem einzelnen sind zum Schluß „die Ecken abzurunden".

Offenbar ist

$$(42.)\qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right]dxdy<d_n,$$

somit für alle n

$$(43.)\qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right]dxdy<d_0,$$

unter d_0 eine positive Zahl verstanden. Wir setzen

$$(44.)\qquad u^{(n)}(x,y)=\sum_i^{1\ldots\infty}\frac{\nu_i^{(n)}}{\sqrt{\lambda_i}}\,\omega_i(x,y).$$

Es ist

$$(45.)\qquad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\sum_i^{1\ldots\infty}(\nu_i^{(n)})^2<d_0.$$

Unter den Funktionen der Folge $u^{(n)}(x,y)$ streichen wir jetzt wie in I § 2, wenn nötig, eine unendliche Anzahl, so daß diejenigen Werte der Doppelfolge $\nu_i^{(n)}$, die nach der Auswahl zurückbleiben, sich in jeder Kolonne einem Grenzwerte nähern. Um die Bezeichnungen nicht noch

weiter zu komplizieren, verstehen wir von nun an unter $u^{(n)}(x, y)$ die Funktionen der zurückgebliebenen Folge. Für alle i ist also der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \nu_i^{(n)} = \mu_i \tag{46.}$$

vorhanden. Offenbar ist

$$\sum_i^{1\ldots\infty} \mu_i^2 \leqq d_0. \tag{47.}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} &\iint_T \left[u^{(n)}(x, y) - u^{(n+m)}(x, y)\right]^2 dx\,dy = \sum_i^{1\ldots\infty} \frac{(\nu_i^{(n)} - \nu_i^{(n+m)})^2}{\lambda_i} \\ &< \sum_i^{1\ldots\mu} \frac{(\nu_i^{(n)} - \nu_i^{(n+m)})^2}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_{\mu+1}} \sum_i^{1\ldots\infty} (\nu_i^{(n)} - \nu_i^{(n+m)})^2 < \sum_i^{1\ldots\mu} \frac{(\nu_i^{(n)} - \nu_i^{(n+m)})^2}{\lambda_i} + \frac{4 d_0}{\lambda_{\mu+1}}, \end{aligned} \tag{48.}$$

daher, wie man sich leicht überzeugt, für alle $m > 0$ gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \iint_T [u^{(n)}(x, y) - u^{(n+m)}(x, y)]^2 dx\,dy = 0. \tag{49.}$$

Hieraus folgt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \iint_T e^{u^{(n)}(x,y)} f(x, y)\,dx\,dy,$$

unter $f(x, y)$ eine beliebige in T und auf S stetige Funktion verstanden, existiert. In der Tat ist für alle $p > 0$

$$\begin{aligned} h_n &= \iint_T e^{u^{(n)}} f\,dx\,dy - \iint_T e^{u^{(n+p)}} f\,dx\,dy = \iint_T \frac{e^{u^{(n)}} - e^{u^{(n+p)}}}{u^{(n)} - u^{(n+p)}} (u^{(n)} - u^{(n+p)}) f\,dx\,dy \\ &= \iint_T e^{u^{(n)}(x,y) + \theta_4(x,y)[u^{(n+p)}(x,y) - u^{(n)}(x,y)]} (u^{(n)} - u^{(n+p)}) f\,dx\,dy, \qquad 0 < \theta_4(x, y) < 1. \end{aligned}$$

Da nun

$$u^{(n)}(x, y) \leqq 0, \quad u^{(n+p)}(x, y) \leqq 0$$

ist, so ist

$$|h_n|^2 < \iint_T f^2\,dx\,dy \iint_T (u^{(n)} - u^{(n+p)})^2\,dx\,dy.$$

Nach (49.) ist also für alle p gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} h_n = 0.$$

In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich zeigen, daß auch der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \iint_T e^{2u^{(n)}(x,y)} f(x, y)\,dx\,dy$$

existiert.

Es sei jetzt ε eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine, sonst willkürliche Zahl und $v(x, y) = \frac{\omega_i(x, y)}{\sqrt{\lambda_i}}$.

Es ist

$$\iint_T \left[\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(u^{(n)} + \varepsilon v)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(u^{(n)} + \varepsilon v)\right\}^2 + 2ke^{u^{(n)}+\varepsilon v}\right] d\xi\, d\eta \geqq d,$$

$$\lim_{n=\infty} \iint_T \left[\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(u^{(n)} + \varepsilon v)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial \eta}(u^{(n)} + \varepsilon v)\right\}^2 + 2ke^{u^{(n)}+\varepsilon v}\right] d\xi\, d\eta \geqq d, \text{*)}$$

daher, da

$$\lim_{n=\infty} \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta}\right)^2 + 2ke^{u^{(n)}}\right] d\xi\, d\eta = d$$

ist,

$$(50.) \quad \begin{aligned} &2\varepsilon \lim_{n=\infty} \iint_T \left[\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + ke^{u^{(n)}}v\right] d\xi\, d\eta \\ &+ \varepsilon^2 \lim_{n=\infty} \iint_T \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + 2ke^{u^{(n)}}\left(\frac{v^2}{2!} + \frac{v^3}{3!} + \cdots\right)\right] d\xi\, d\eta \geqq 0. \end{aligned}$$

In bekannter Weise schließt man hieraus

$$(51.) \quad \lim_{n=\infty} \iint_T \left[\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + ke^{u^{(n)}}v\right] d\xi\, d\eta = 0.$$

Wir erhalten also

$$\lim_{n=\infty} \left[\nu_i^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \iint_T k(\xi, \eta) e^{u^{(n)}(\xi, \eta)} \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right] = 0,$$

somit

$$(52.) \quad \sqrt{\lambda_i}\, \mu_i = -\lim_{n=\infty} \iint_T k(\xi, \eta) e^{u^{(n)}(\xi, \eta)} \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Nun ist für alle m

$$(53.) \quad \sum_i^{1 \ldots m} \left(\iint_T k(\xi, \eta) e^{u^{(n)}(\xi, \eta)} \omega_i(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right)^2 \leqq \iint_T (k(\xi, \eta))^2 e^{2u^{(n)}(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

---

*) Wie soeben bewiesen, ist der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \iint_T k e^{u^{(n)}+\varepsilon v}\, d\xi\, d\eta$$

vorhanden. Wie man sofort sieht, ist aber auch

$$\lim_{n=\infty} \iint_T \left[\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] d\xi\, d\eta = \lim_{n=\infty} \nu_i^{(n)} = \mu_i$$

vorhanden, so daß der Grenzübergang gestattet ist.

daher

$$\sum_{i}^{1\dots m} \lim_{n=\infty} \Big(\iint_T k(\xi,\eta)\, e^{u^{(n)}(\xi,\eta)}\, \omega_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \Big)^2$$

(54.)

$$\leqq \lim_{n=\infty} \iint_T (k(\xi,\eta))^2 e^{2u^{(n)}(\xi,\eta)}\, d\xi\, d\eta = \gamma,$$

also auch

$$\sum_{i}^{1\dots\infty} \lim_{n=\infty} \Big(\iint_T k(\xi,\eta)\, e^{u^{(n)}(\xi,\eta)}\, \omega_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \Big)^2 \leqq \gamma.$$

Die unendliche Reihe $\sum_{i}^{1\dots\infty} \lambda_i \mu_i^2$ konvergiert. Die unendliche Reihe

$$\sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x,y)$$

konvergiert unbedingt und in gleichem Grade. In der Tat ist

$$\Big| \sum_{i>n} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x,y) \Big|^2 < \sum_{i>n} \lambda_i \mu_i^2 \sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{[\omega_i(x,y)]^2}{\lambda_i^2}.$$

Wir setzen

(55.)
$$\sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\, \omega_i(x,y) = u(x,y).$$

Es ist nun weiter

(56.)
$$\lim_{n=\infty} \iint_T [u(x,y) - u^{(n)}(x,y)]^2\, dx\, dy = \lim_{n=\infty} \sum_{i}^{1\dots\infty} \frac{(\mu_i - \nu_i^{(n)})^2}{\lambda_i} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, da

$$u^{(n)}(x,y) \leqq 0 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

ist, *daß für alle* (x,y) *in* T *und auf* S

(57.)
$$u(x,y) \leqq 0$$

ist. Es ist jetzt leicht einzusehen, daß

(58.)
$$\lim_{n=\infty} \iint_T k(x,y)\, e^{u^{(n)}(x,y)}\, dx\, dy = \iint_T k(x,y)\, e^{u(x,y)}\, dx\, dy$$

ist. In der Tat ist

$$\Big| \iint_T k(x,y)[e^{u(x,y)} - e^{u^{(n)}(x,y)}]\, dx\, dy \Big|^2 = \Big| \iint_T k(x,y) \frac{e^u - e^{u^{(n)}}}{u - u^{(n)}} (u - u^{(n)})\, dx\, dy \Big|^2$$

$$< \iint_T k^2 e^{2(u^{(n)} + \theta_5(x,y)(u - u^{(n)}))}\, dx\, dy \iint_T (u - u^{(n)})^2\, dx\, dy, \qquad 0 < \theta_5(x,y) < 1.$$

Der Ausdruck rechts konvergiert aber für $n = \infty$ gegen Null. Aus (52.) und (58.) ergibt sich

(59.)
$$\sqrt{\lambda_i}\, \mu_i = -\iint_T k(\xi,\eta)\, e^{u(\xi,\eta)}\, \omega_i(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$(60.)\quad U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,k(\xi,\eta)\,e^{u(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Es ist

$$(61.)\quad \iint_T U(x,y)\,\omega_i(x,y)\,dx\,dy = -\frac{1}{2\pi}\iint_T k(\xi,\eta)\,e^{u(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta \iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,\omega_i(x,y)\,dx\,dy,$$

oder infolge

$$(62.)\quad \omega_i(\xi,\eta)=\frac{\lambda_i}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,\omega_i(x,y)\,dx\,dy$$

auch

$$(63.)\quad \iint_T U(x,y)\,\omega_i(x,y)\,dx\,dy=-\frac{1}{\lambda_i}\iint_T k(\xi,\eta)\,e^{u(\xi,\eta)}\,\omega_i(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Die *Fourier*schen Koeffizienten der stetigen, auf S verschwindenden Funktionen $u(x,y)$ und $U(x,y)$ sind einander gleich. Also ist

$$(64.)\quad u(x,y)=U(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_T G(x,y;\xi,\eta)\,k(\xi,\eta)\,e^{u(\xi,\eta)}\,d\xi\,d\eta.$$

Aus (64.) folgt nun in bekannter Weise, daß $u(x,y)$ in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=k(x,y)\,e^u$$

genügt. Man überzeugt sich endlich in bekannter Weise, daß $u(x,y)$ das Integral (37.) zum Minimum macht. Es ist also

$$\iint_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2ke^u\right]dx\,dy=d.$$

Wie man weiß, ist die Lösung eindeutig.

Kapitel III. Zweidimensionale Variationsprobleme. Das zweite und das dritte Randwertproblem. Stetige Lösungen auf geschlossenen Flächen.

§ 1. Problemstellung und vorbereitende Betrachtungen.

Den Betrachtungen dieses Kapitels legen wir das in dem vorhergehenden Kapitel eingeführte von den Randkurven S begrenzte Gebiet T zugrunde. Es sei $h(s)$ eine positive, auf S erklärte stetige Funktion:

(1.) $$h(s) \geqq h' > 0.$$

Es möge ferner $q(x, y)$ eine in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, der Beziehung

(2.) $$q(x, y) \geqq 0$$

genügende Funktion bezeichnen. Insbesondere kann $q(x, y)$ auch identisch verschwinden.

Wir stellen uns jetzt folgende Aufgabe: *Es sind unter allen in T und auf S stetigen Funktionen $u(x, y)$, die in T abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben und deren Dirichletsches Integral* $\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$ *existiert, diejenigen zu bestimmen, die den Integralausdruck*

(3.) $$I_4 = \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + qu^2 + P(x, y, u)\right] dx\,dy + \int_S hu^2\,ds$$

zum Minimum machen. $P(x, y, u)$ ist die in II § 1 erklärte Funktion.

Die folgenden Betrachtungen sind den im Kapitel II durchgeführten analog. Einige Vorsicht erfordert nur die Behandlung der sich jetzt ergebenden Randbedingungen.

Wir gehen von dem orthogonalen, normierten System $\psi_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ derjenigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung

(4.) $$\Delta(u) + \lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu + \lambda u = 0$$

aus, die auf S der Bedingung

(5.) $$\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = h\psi_i$$

genügen. Unter $\frac{\partial}{\partial n}$ verstehen wir wie immer die Ableitung in der Richtung der Innennormale. Die Funktionen $\psi_i(x, y)$ sind in T und auf S stetig und haben in T stetige partielle Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung. Aus (4.) folgt, daß der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ sich auch noch auf S stetig verhält*). Alle Eigenwerte λ_i der Differentialgleichung (4.)

*) Die Ableitung in der Richtung der Normale $\frac{\partial \psi_i}{\partial n}$ ist auf S stetig. Über die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}$ auf S läßt sich, wenn $h(s)$

sind, wie man weiß, positiv. Bezeichnet $u_0(x, y)$ irgendeine in T und auf S abteilungsweise stetige Funktion, so ist

$$(6.) \qquad \iint_T [u_0(x,y)]^2 dx dy = \sum_i^{1\dots\infty} \Big(\iint_T u_0(\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \Big)^2 .$$

Ist $v_0(x, y)$ eine andere in T und auf S abteilungsweise stetige Funktion, so ist

$$(7.) \qquad \begin{aligned} &\iint_T u_0(x,y) v_0(x,y)\, dx dy \\ &\quad = \sum_i^{1\dots\infty} \iint_T u_0(\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \iint_T v_0(\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi d\eta . \end{aligned}$$

Aus der Theorie der linearen Integralgleichungen ergibt sich in bekannter Weise der Entwicklungssatz, dem wir im folgenden eine gegenüber der üblichen etwas schärfere Fassung erteilen.

Es sei $u^*(x, y)$ eine in T und auf S stetige Funktion, die in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Es wird ferner vorausgesetzt, daß der Ausdruck $\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}$ sich auch noch auf S stetig verhält, daß $u^*(x, y)$ stetige Normalableitung $\frac{\partial u^*}{\partial n}$ hat und der Beziehung

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = h u^*$$

genügt*). Alsdann läßt sich $u^*(x, y)$ in die unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(8.) \qquad u^*(x,y) = \sum_i^{1\dots\infty} \psi_i(x,y) \iint_T u^*(\xi,\eta)\psi_i(\xi,\eta)\, d\xi d\eta$$

entwickeln.

Es sei $\mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)$ die zu T und der Randbedingung (5.) gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung

$$(9.) \qquad \Delta(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - qu = 0.$$

Desgleichen sei $\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)$ die zu der Randbedingung (5.) gehörige *Green*sche Funktion der Differentialgleichung

---

wie oben schlechthin stetig vorausgesetzt wird, zunächst nichts bestimmtes aussagen. In den folgenden Entwicklungen kommen aber auch die Werte $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}, \frac{\partial \psi_i}{\partial y}$ auf S nirgends vor.

*) Über das Verhalten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial y}$ auf S werden also keinerlei Voraussetzungen gemacht.

$$(10.)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0^*).$$

Unter Zuhilfenahme der *Green*schen Formel (16.) findet man in bekannter Weise

$$(11.)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y) &= \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\\ &-\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, \mathfrak{G}(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.\end{aligned}$$

Für alle (x_0, y_0) und (x, y) in T und auf S ist*)

$$(12.)\qquad |\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)| < A_4 |\log[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]| + A_4'.$$

Aus (11.) und (12.) folgt unter Benutzung der *Fredholm*schen Auflösungsformel für alle (x_0, y_0), (x, y) in T und auf S

$$(13.)\qquad |\mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)| < A_5 |\log|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2|| + A_5'.$$

Aus (11.) ergibt sich, wenn man (x, y) mit (x_0, y_0) vertauscht, da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ symmetrisch sind, die weitere Formel

$$(14.)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y) &= \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\\ &-\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{G}(x_0, y_0; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, \mathfrak{G}^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.\end{aligned}$$

Die Funktionen $\psi_i(x, y)$ sind Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$(15.)\qquad \psi(x_0, y_0)=\frac{\lambda}{2\pi}\iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\,\psi(x, y)\, dx\, dy.$$

Jede in der Form $\iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy$ darstellbare Funktion, unter $g(x, y)$ eine in T und auf S stetige Funktion verstanden, läßt sich, wie man weiß, in eine unbedingt und gleichmäßig konvergente Reihe von der Form (8.) entwickeln. Aus der *Green*schen Formel

$$(16.)\qquad \iint_T [\underline{u}\,\Delta(\underline{v}) - \underline{v}\,\Delta(\underline{u})]\, dx\, dy = -\int_S \left(\underline{u}\frac{\partial \underline{v}}{\partial n} - \underline{v}\frac{\partial \underline{u}}{\partial n}\right) ds$$

läßt sich für unsere Funktion $u^*(x, y)$ aber in der Tat die Darstellung

$$(17.)\qquad u^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right) - q u^*\right] dx\, dy$$

ableiten.

---

*) Über das dritte Randwertproblem der Differentialgleichungen (10.) und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=p(x, y)$ vgl. z. B. *Lichtenstein*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 1910, S. 19—28.

Die unendliche Reihe $\sum_{i}^{1\dots\infty} \lambda_i^2 \left(\iint_T u^* \psi_i \, d\xi \, d\eta\right)^2$ konvergiert.

Es sei T' wie in II § 1 ein von den Randkurven S' begrenztes Gebiet in T. Wir finden

$$\iint_T u^* \psi_i \, d\xi \, d\eta = -\frac{1}{\lambda_i} \iint_T u^* \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \eta^2} - q \psi_i\right) d\xi \, d\eta$$

$$= -\frac{1}{\lambda_i} \lim \iint_{T'} u^* \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \eta^2} - q \psi_i\right) d\xi \, d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} \lim \int_{S'} u^* \frac{\partial \psi_i}{\partial n} \, ds + \frac{1}{\lambda_i} \lim \iint_{T'} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} + q \psi_i u^*\right) d\xi \, d\eta$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_S h u^* \psi_i \, ds - \frac{1}{\lambda_i} \lim \int_{S'} \psi_i \frac{\partial u^*}{\partial n} \, ds - \frac{1}{\lambda_i} \iint_{T'} \psi_i \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} - q u^*\right) d\xi \, d\eta$$

$$= -\frac{1}{\lambda_i} \iint_T \psi_i \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}\right) - q u^*\right] d\xi \, d\eta,$$

daher

$$(18.) \quad \sum_{i}^{1\dots\infty} \lambda_i^2 \left(\iint u^* \psi_i \, d\xi \, d\eta\right)^2 = \iint_T \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}\right) - q u^*\right]^2 d\xi \, d\eta.$$

Bezeichnet $v^*(x, y)$ eine weitere in T und auf S stetige Funktion, die in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, auf S stetige, der Beziehung $\frac{\partial v^*}{\partial n} = h v^*$ genügende Normalableitung hat und die überdies so beschaffen ist, daß $\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2}$ sich auch noch auf S stetig verhält, so ist

$$(19.) \quad \iint_T \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial v^*}{\partial y} + q u^* v^*\right) dx \, dy + \int_S h u^* v^* \, ds = \sum_{i}^{1\dots\infty} \lambda_i \iint_T u^* \psi_i \, d\xi \, d\eta \iint_T v^* \psi_i \, d\xi \, d\eta.$$

Insbesondere ergibt sich, wenn $u^* = v^*$ gesetzt wird,

$$(20.) \quad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)^2 + q (u^*)^2\right] dx \, dy + \int_S h (u^*)^2 \, ds = \sum_{i}^{1\dots\infty} \lambda_i \left(\iint_T u^* \psi_i \, d\xi \, d\eta\right)^2.$$

In der Tat ist

$$\iint_{T'} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} \frac{\partial v^*}{\partial y} + q u^* v^*\right) dx \, dy = -\int_{S'} v^* \frac{\partial u^*}{\partial n} \, ds - \iint_{T'} v^* \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - q u^*\right) dx \, dy,$$

so daß

$$\iint_T \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\frac{\partial v^*}{\partial x}+\frac{\partial u^*}{\partial y}\frac{\partial v^*}{\partial y}+q u^* v^*\right)dx\,dy+\int_S h u^* v^* ds$$

$$=-\int_S v^*\frac{\partial u^*}{\partial n}ds-\iint_T v^*\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)-q u^*\right]dx\,dy+\int_S h u^* v^* ds$$

$$=-\iint_T v^*\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)-q u^*\right]dx\,dy$$

$$=-\sum_i^{1\ldots\infty}\iint_T v^*\psi_i\,d\xi\,d\eta\iint_T \psi_i\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}\right)-q u^*\right]d\xi\,d\eta.$$

Wie vorhin gezeigt, ist aber

$$\iint_T \psi_i\left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}\right)-q u^*\right]d\xi\,d\eta=-\lambda_i\iint_T u^*\psi_i\,d\xi\,d\eta.$$

Wir erhalten also in der Tat die Formel (19.).

§ 2. Fortsetzung.

Ist ν_i $(i=1,2,\ldots)$ irgendeine unendliche Folge reeller Zahlen mit konvergenter Quadratsumme, und setzt man

$$(21.)\qquad u_n(x,y)=\sum_i^{1\ldots n}\frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}\psi_i(x,y),$$

$$(22.)\qquad \iint_T P(x,y,u_n(x,y))\,dx\,dy=M(\nu_1,\ldots\nu_n)=M_n,$$

so findet man ganz wie in II § 1 wieder, daß

$$(23.)\qquad \lim_{n=\infty} M_n=M(\nu_1,\nu_2,\ldots)=M(\nu)$$

existiert und eine *vollstetige* Funktion der unendlichvielen Variabeln ν_i $(i=1,2,\ldots)$ darstellt. Sind $\frac{\nu_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ *Fourier*sche Koeffizienten einer stetigen Funktion $u(x,y)$, so ist

$$(24.)\qquad M(\nu)=\iint_T P(x,y,u(x,y))\,dx\,dy.$$

Wir werden jetzt zeigen, daß, falls es eine Lösung $u(x,y)$ unseres Variationsproblems gibt, diese in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzt, auf S stetige, der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial n}=hu$ genügende Normalableitung hat und in T die Differentialgleichung

$$(25.)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-qu=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u)$$

erfüllt.

Es sei $v^*(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion, die in T, außer auf einer einzigen geschlossenen Kurve C_0, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat; auf C_0 ändern sich diese Ableitungen sprungweise. Es sei ferner bekannt, daß auch die Normalableitung $\frac{\partial v_*}{\partial n}$ auf S stetig ist und der Beziehung $\frac{\partial v_*}{\partial n} = h v_*$ genügt, sowie daß der Ausdruck $\frac{\partial^2 v_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y^2}$ sich auf S stetig verhält. Aus der Minimaleigenschaft der Funktion $u(x, y)$ folgt alsdann zunächst

$$(26.)\quad \iint_T \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_*}{\partial y} + q u v_* + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u) v_*\Big) dx\,dy + \int_S h u v_*\, ds = 0.$$

Diese Gleichung ergibt sich in bekannter Weise, wenn man beachtet, daß der Grenzwert

$$\lim \iint_{T'} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy = \iint_T \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy$$

existiert. Es sei nämlich S'' ein System von geschlossenen regulär analytischen Kurven in T, die so gewählt sind, daß in den von S und S'' begrenzten Gebieten Θ der Ausdruck $\frac{\partial^2 v_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y^2}$ sich stetig verhält und die Kurve C_0 ganz in $T - \Theta$ liegt. Es sei ferner Θ' das den Bereichen T' und Θ gemeinsame Gebiet. Es ist

$$\lim \iint_{T'} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy$$

$$= \iint_{T-\Theta} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy + \lim \iint_{\Theta'} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy$$

$$= \iint_{T-\Theta} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy - \lim \iint_{\Theta'} v_*\Big(\frac{\partial^2 v_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y^2}\Big) dx\,dy - \lim \int_{S''+S'} v_* \frac{\partial v_*}{\partial n}\, ds$$

$$= \iint_{T-\Theta} \Big[\Big(\frac{\partial v_*}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_*}{\partial y}\Big)^2\Big] dx\,dy - \iint_{\Theta} v_*\Big(\frac{\partial^2 v_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_*}{\partial y^2}\Big) dx\,dy - \int_{S''+S} v_* \frac{\partial v_*}{\partial n}\, ds.$$

Es sei C'' die Kurve

$$(27.)\qquad \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y) = \gamma,$$

unter γ wie in II § 1 eine beliebig große positive Zahl verstanden. K'' sei das von C'' begrenzte endliche Gebiet. Wir wählen

$$(28.)\qquad \begin{aligned} v^*(x, y) &= \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y) \text{ in } T - K'', \\ &= \gamma \qquad\qquad \text{in } K'' \end{aligned}$$

und erhalten

$$\iint\limits_T \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_*}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_*}{\partial y}\right]dx\,dy = \lim_{T'=T}\iint\limits_{T'-K''}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_*}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_*}{\partial y}\right]dx\,dy$$

$$= -\int\limits_{C''} u\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}\,ds - \lim\int\limits_{S'} u\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}\,ds = -\int\limits_{C''} u\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}\,ds - \int\limits_{S} hu\mathfrak{G}\,ds,$$

daher nach (26.)

$$(29.)\quad \begin{aligned} &-\int\limits_{C''} u\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n}\,ds + \tfrac{1}{2}\iint\limits_{T-K''}\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)\,dx\,dy \\ &+\iint\limits_{T-K''}\mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\,qu\,dx\,dy + \iint\limits_{K''}\gamma\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)+qu\right]dx\,dy = 0. \end{aligned}$$

Geht man zur Grenze $\gamma=\infty$ über, so findet man mit Rücksicht darauf, daß

$$\lim_{\gamma=\infty}\gamma\iint\limits_{K''} dx\,dy = 0$$

ist, in bekannter Weise

$$(30.)\quad u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_T \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)+qu\right]dx\,dy.$$

Aus dieser Formel folgt sofort, daß $u(x, y)$ in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$(31.)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-qu = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)$$

genügt. Daher ist der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auch noch auf S stetig. Es ist nun auch leicht zu zeigen, daß auf S

$$(32.)\quad \frac{\partial u}{\partial n} = hu$$

ist. Es sei nämlich $\bar{U}(x, y)$ diejenige in T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$(33.)\quad \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)+qu,$$

die auf S der Bedingung

$$(34.)\quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} = h\bar{U}$$

genügt*). Nach bekannten Sätzen erhält man

$$(35.)\quad \bar{U}(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_T \mathfrak{G}(x_0, y_0; x, y)\left[\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x, y, u)+qu\right]dx\,dy.$$

*) Vgl. die Fußnote *) S. 69.

Hieraus und aus der Gleichung (30.) folgt identisch

$$\bar{U}(x_0, y_0) = u(x_0, y_0).$$

Also ist auf S die Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial n}$ vorhanden und stetig. Ferner ist

$$\frac{\partial u}{\partial n} = hu. \tag{36.}$$

§ 3. Auflösung des zweiten und des dritten Randwertproblems.

Wie in II § 1 genügt es augenscheinlich, unter den zum Vergleich zugelassenen Funktionen nur diejenigen zu betrachten, die in T und auf S stetig sind, in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, deren Normalableitung ferner auf S stetig ist und der Beziehung (36.) genügt und deren zweiter Differentialparameter sich schließlich auch noch auf S stetig verhält. Es sei d die untere Grenze des Integralausdruckes I_4 und $u^{(n)}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von Vergleichsfunktionen, die so beschaffen sind, daß

$$\iint_T \left\{\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2 + q(u^{(n)})^2 + P(x, y, u^{(n)})\right\} dx dy + \int_S h(u^{(n)})^2 ds = d_n, \tag{37.}$$

$$\lim_{n=\infty} d_n = d \tag{38.}$$

ist. Zur Bestimmung des Wertes d und einer Folge $u^{(n)}(n = 1, 2, \ldots)$ kann man wie in I § 1 verfahren. Augenscheinlich ist für alle n

$$\iint_T \left\{\left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}\right)^2 + q(u^{(n)})^2\right\} dx dy + \int_S h(u^{(n)})^2 ds < d_0 \ (d_0 = \text{Konstante}). \tag{39.}$$

Setzt man

$$u^{(n)}(x, y) = \sum_i^{1 \ldots \infty} \frac{\nu_i^{(n)}}{\sqrt{\lambda_i}} \psi_i(x, y), \tag{40.}$$

so ist

$$\sum_i^{1 \ldots \infty} (\nu_i^{(n)})^2 < d_0. \tag{41.}$$

Von der Doppelfolge $\nu_i^{(n)}$ $(i, n = 1, 2, \ldots)$ gelangt man wieder zu einer Folge μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, so daß $\sum_i^{1 \ldots \infty} \mu_i^2$ konvergiert und überdies

$$\sum_i^{1 \ldots \infty} \mu_i^2 + M(u) = d \tag{42.}$$

ist. Die weitere Betrachtung verläuft derjenigen in II § 1 parallel. Setzen wir*)

*) Vgl. die Formeln (21.) und (22.).

$$N^{(i)}(\nu_1, \nu_2, \ldots) = \lim_{n=\infty} N^{(i)}(\nu_1, \ldots \nu_n)$$

(43.)
$$= \lim_{n=\infty} \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P(x, y, u_n)\, \psi_i(x, y)\, dx\, dy,$$

so finden wir für μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ die unendlichvielen Gleichungen

(44.)
$$2\mu_l + \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} N^{(l)}(\mu) = 0. \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

Es sei jetzt

(45.)
$$U_n(x, y) = \sum_i^{1 \ldots n} \frac{\mu_i}{\sqrt{\lambda_i}} \psi_i(x, y)$$

und

(46.)
$$V_n(x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\, \frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, U_n(x, y)\big)\, dx\, dy.$$

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt mit Rücksicht auf die Ungleichheiten (2.) (Kap. II), daß $V_n(x_0, y_0)$ sich für alle (x_0, y_0) in T und auf S mit wachsendem n gleichmäßig einem Grenzwert nähert. Es sei

(47.)
$$V(x_0, y_0) = \lim_{n=\infty} V_n(x_0, y_0).$$

$V(x_0, y_0)$ ist eine in T und auf S stetige Funktion. Man findet weiter

$$\iint_T V(x_0, y_0)\, \psi_l(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 = \lim_{n=\infty} \iint_T V_n(x_0, y_0)\, \psi_l(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0$$

(48.)
$$= -\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \iint_T \frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, U_n(x, y)\big)\, dx\, dy \Big[\iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\, \psi_l(x_0, y_0)\, dx_0 dy_0 \Big]$$

oder, da

(49.)
$$\psi_l(x, y) = \frac{\lambda_l}{2\pi} \iint_T \mathfrak{G}^*(x, y; x_0, y_0)\, \psi_l(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0$$

ist, nach (44.)

(50.)
$$\iint_T V(x_0, y_0)\, \psi_l(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 = \frac{\mu_l}{\sqrt{\lambda_l}}.$$

Die Werte $\frac{\mu_l}{\sqrt{\lambda_l}}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ *sind also Fouriersche Koeffizienten der stetigen Funktion* $V(x, y)$. Setzt man jetzt

(51.)
$$W(x_0, y_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T \mathfrak{G}^*(x_0, y_0; x, y)\, \frac{\partial}{\partial u} P\big(x, y, V(x, y)\big)\, dx\, dy,$$

so findet man ganz wie in § 3 des zweiten Kapitels $W(x, y) = V(x, y)$, d. h.

(52.)
$$V(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \iint_T \mathfrak{G}^*(x, y; \xi, \eta)\, \frac{\partial}{\partial u} P\big(\xi, \eta, V(\xi, \eta)\big)\, d\xi\, d\eta.$$

Wendet man jetzt die Beziehung (14.) an, so erhält man nach einer leichten Umrechnung

$$V(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\iint_T \mathfrak{G}(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial u}P(\xi,\eta;V(\xi,\eta))\,d\xi\,d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_T \mathfrak{G}(x,y;\xi,\eta)\,q(\xi,\eta)\,V(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{53.}$$

Diese Gleichung ist der Gleichung (30.) ganz analog. Wir schließen aus ihr, daß $V(x,y)$ in T stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-qu=\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(x,y,u) \tag{54.}$$

genügt. Auf S hat $V(x,y)$ stetige, der Bedingung $\frac{\partial V}{\partial n}=hV$ genügende Normalableitung.

Wir nehmen jetzt an, daß $q(x,y)$ in T nicht identisch verschwindet und wie vorhin der Beziehung

$$q(x,y)\geqq 0 \tag{55.}$$

genügt. Es läßt sich dann das folgende Variationsproblem erledigen: *Unter allen in T und auf S stetigen Funktionen, die in T abteilungsweise stetige Ableitungen erster Ordnung haben und deren Dirichletsches Integral* $\iint_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$ *existiert, sind diejenigen zu bestimmen, die das Doppelintegral*

$$\iint_T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+qu^2+P(x,y,u)\right]dx\,dy \tag{56.}$$

zum Minimum machen.

Man geht von dem orthogonalen, normierten System derjenigen Eigenfunktionen der Differentialgleichung (4.) aus, deren Normalableitung auf S verschwindet. Die zugehörigen Eigenwerte sind sämtlich positiv. *Man gewinnt so eine Lösung der Differentialgleichung* (54.), *die auf S der Beziehung* $\frac{\partial u}{\partial n}=0$ *genügt.*

Wäre $q(x,y)\equiv 0$, so hätte man von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda u=0$$

auszugehen. Im vorliegenden Falle ist ein Eigenwert gleich Null. Dieser

Umstand hat Schwierigkeiten zur Folge, denen man durch besondere Annahmen über die Funktion $P(x, y, u)$ begegnen kann. Dieselbe Erscheinung zeigt sich bei der Bestimmung von Lösungen, die auf geschlossenen, singularitätenfreien Flächen sich stetig verhalten. Diesen Betrachtungen wenden wir uns jetzt zu.

§ 4. Stetige Lösungen auf geschlossenen singularitätenfreien Flächen.

In ähnlicher Weise wie in den vorhergehenden Paragraphen lassen sich stetige Lösungen gewisser nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus auf geschlossenen, singularitätenfreien Flächen bestimmen. Legt man der Betrachtung speziell einen Torus zugrunde, so erhält man bei dem Übergang zur Ebene *doppeltperiodische* Lösungen. Man hat hierbei lediglich die durch geeignete Schnitte einfach zusammenhängend gemachte Oberfläche des Torus in bekannter Weise auf die Fläche eines Rechtecks konform abzubilden. Im eindimensionalen Gebiete entsprechen den im folgenden betrachteten Lösungen periodische Lösungen.

Es sei T eine der Einfachheit halber regulär analytische, geschlossene Fläche. Ihre Punkte denken wir uns auf ein beliebiges System isothermischer Parameter p und q bezogen. Das Linienelement der Fläche sei

$$ds^2 = \varrho(dp^2 + dq^2). \tag{57.}$$

Die beiden *Beltrami*schen Differentialparameter der Fläche sind

$$\Delta_1 u = \frac{1}{\varrho}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2\right], \quad \Delta_2 u = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right]. \tag{58.}$$

Es sei jetzt $Q(p, q)$ eine auf T erklärte nicht negative, nicht identisch verschwindende, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. Es sei ferner $P(p, q, u)$ eine auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, den Beziehungen

$$P(p, q, u) > 0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial u} P(p, q, u)\right| < A_6, \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial u^2} P(p, q, u)\right| < A_6 \tag{59.}$$

(A_6 = Konstante)

genügende Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, *unter allen auf T*

stetigen Funktionen, deren partielle Ableitungen erster Ordnung abteilungsweise stetig sind, diejenigen zu bestimmen, die das Integral

$$(60.) \qquad \iint_T [\Delta_1 u + Qu^2 + P(p, q, u)]\, d\omega,$$

unter $d\omega$ das Flächenelement verstanden, *zum Minimum machen.*

Die Behandlung dieser Aufgabe ist derjenigen in §§ 1 und 2 betrachteten ähnlich. Da Randbedingungen jetzt nicht vorliegen, so treten sogar Vereinfachungen ein.

Man zeigt zunächst unter Zuhilfenahme der auf T, außer in einem Punkte (p_0, q_0), nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen, in (p_0, q_0) logarithmisch unendlichen *Green*schen Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta_2 u - Qu = 0,$$

daß die gesuchte Lösung, falls sie existiert, auf T stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat. Es ist daher erlaubt, als Vergleichsfunktionen ausschließlich Funktionen anzunehmen, die auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sind.

Der weiteren Betrachtung legt man die auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen, orthogonalen, normierten Eigenfunktionen $H_i(p, q)$ der Differentialgleichung

$$(61.) \qquad \Delta_2 u - Qu + \lambda u = 0$$

zu Grunde. Auch jetzt sind alle Eigenwerte λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ positiv. Die unendliche Reihe $\sum_i^{1\ldots\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}$ konvergiert, die Reihe $\sum_i^{1\ldots\infty} \frac{[H_i(p,q)]^2}{\lambda_i^2}$ konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Jede nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung auf T stetige Funktion $u(p, q)$ läßt sich in eine unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(62.) \qquad u(p, q) = \sum_i^{1\ldots\infty} H_i(p, q) \iint_T u(\bar{p}, \bar{q})\, H_i(\bar{p}, \bar{q})\, d\bar{\omega}$$

entwickeln. Es ist schließlich

$$(63.) \qquad \iint_T [\Delta_1 u + Qu^2]\, d\omega = \sum_i^{1\ldots\infty} \lambda_i \Big[\iint_T u(\bar{p}, \bar{q})\, H_i(\bar{p}, \bar{q})\, d\bar{\omega}\Big]^2.$$

Die weitere Betrachtung verläuft ganz wie früher. Man gewinnt eine auf T nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung der Differentialgleichung

$$(64.) \qquad \Delta_2 u - Qu = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(p, q, u).$$

Ist für alle (p, q) auf T und alle u

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}P(p, q, u) > 0,$$

so ist die Lösung eindeutig.

Ist $Q(p, q) \equiv 0$, so versagen unsere Betrachtungen, und zwar weil die Differentialgleichung

$$\Delta_2 u + \lambda u = 0$$

den Wert Null zum Eigenwert hat. Wie in I § 4 läßt sich unter gewissen speziellen Annahmen über die Funktion $P(p, q, u)$ doch noch die Existenz überall stetiger Lösungen der Differentialgleichung

$$(65.) \qquad \Delta_2 u = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}P(p, q, u)$$

beweisen.

Kapitel IV. Auflösung einer nichtlinearen Integralgleichung.

Es sei $K(s, t, u)$ eine in dem Gebiete

$$(1.) \qquad 0 \leqq s \leqq \pi, \quad 0 \leqq t \leqq \pi, \quad 0 \leqq u \leqq \pi$$

erklärte stetige, symmetrische Funktion. *Unter allen in dem Intervalle*

$$(2.) \qquad 0 \leqq s \leqq \pi$$

stetigen, der Beziehung

$$(3.) \qquad \int_0^\pi [\varphi(s)]^2 ds = \frac{\pi}{2}$$

genügenden Funktionen sind diejenigen zu bestimmen, die das dreifache Integral

$$(4.) \qquad \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,\varphi(u)\,ds\,dt\,du$$

*zum Maximum machen**).

Es seien $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\tau(s)$ beliebige in (2.) stetige Funktionen und

$$(5.) \quad \varphi(s) \sim \sum_i^{0\ldots\infty} x_i \cos is, \quad \psi(s) \sim \sum_i^{0\ldots\infty} y_i \cos is, \quad \tau(s) \sim \sum_i^{0\ldots\infty} z_i \cos is.$$

---

*) Der Einfachheit halber wird $K(s, t, u)$ stetig vorausgesetzt. Die Betrachtungen dieses Kapitels gelten, wie man sich leicht überzeugt, auch wenn bei $K(s, t, u)$ und $\varphi(s)$ geeignete Unstetigkeiten zugelassen werden.

Nach bekannten Sätzen ist

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s,t,u)\,\varphi(s)\,\psi(t)\,\tau(u)\,ds\,dt\,du$$

$$(6.) \qquad = \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} x_i y_j z_k \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s,t,u)\cos is\cos jt\cos ku\,ds\,dt\,du$$

$$= \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk} x_i y_j z_k = \Pi(x,y,z).$$

$\Pi(x,y,z)$ ist eine *vollstetige* Funktion der unendlichvielen Variabeln x_i, y_i, z_i $(i=0,1,\ldots)$. Es ist nämlich zunächst

$$(7.) \qquad \left|\sum_{i+j+k>n} a_{ijk} x_i y_j z_k\right|^2 \leqq \sum_{i+j+k>n} x_i^2 y_j^2 z_k^2 \sum_{i+j+k>n} a_{ijk}^2$$

$$\leqq \sum_i^{0\ldots\infty} x_i^2 \sum_j^{0\ldots\infty} y_j^2 \sum_k^{0\ldots\infty} z_k^2 \sum_{i+j+k>n} a_{ijk}^2.$$

Die unendliche Reihe $\sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk}^2$ konvergiert. Für alle den Beziehungen

$$(8.) \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} x_i^2 \leqq 1, \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} y_i^2 \leqq 1, \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} z_i^2 \leqq 1$$

genügenden Werte der unendlichvielen Variabeln konvergiert der Ausdruck auf der linken Seite der Formel (7.) mit unendlich wachsendem n gleichmäßig gegen Null. Sind nun $x_i^{(l)}$, $y_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}$ $\binom{l=1,2,\ldots}{i=0,1,\ldots}$ unendliche Folgen von Zahlen, so daß

$$(9.) \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} (x_i^{(l)})^2 \leqq 1, \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} (y_i^{(l)})^2 \leqq 1, \qquad \sum_i^{0\ldots\infty} (z_i^{(l)})^2 \leqq 1, \qquad (l=1,2,\ldots)$$

$$(10.) \qquad \lim_{l=\infty} x_i^{(l)} = x_i^*, \qquad \lim_{l=\infty} y_i^{(l)} = y_i^*, \qquad \lim_{l=\infty} z_i^{(l)} = z_i^*, \qquad (i=1,2,\ldots)$$

so ist, wie man nunmehr leicht sieht,

$$(11.) \qquad \lim_{l=\infty} \Pi(x^{(l)}, y^{(l)}, z^{(l)}) = \Pi(x^*, y^*, z^*).$$

Die Funktion $\Pi(x,y,z)$ ist also in der Tat vollstetig.

Ist

$$(12.) \qquad 2x_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} x_i^2 = 1,$$

daher

$$\sum_i^{0\ldots\infty} x_i^2 \leqq 1,$$

so ist offenbar

$$(13.) \qquad |\Pi(x,x,x)|^2 \leqq \left(\sum_i^{0\ldots\infty} x_i^2\right)^3 \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk}^2 \leqq \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk}^2.$$

Das eingangs gestellte Problem ersetzen wir jetzt durch das folgende, wie sich bald zeigen wird, ihm äquivalente: *Unter allen der*

Gleichung (12.) *genügenden Werten der Variabeln* $x_i (i = 0, 1, \ldots)$ *sind diejenigen zu bestimmen, für die die Funktion* $\Pi(x, x, x)$ *ihr Maximum erreicht.*

Es sei d die nach (13.) endliche obere Grenze der Werte der Funktion $\Pi(x, x, x)$, wenn ihre Argumente die Bedingungsgleichung (12.) erfüllen. Es sei

$$x_i^{(l)} \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{14.}$$

eine unendliche Doppelfolge reeller Zahlen, die so beschaffen sind, daß

$$2 (x_0^{(l)})^2 + \sum_{i}^{1 \ldots \infty} (x_i^{(l)})^2 = 1, \tag{15.}$$

$$\sum_{i,j,k}^{0 \ldots \infty} a_{ijk} x_i^{(l)} x_j^{(l)} x_k^{(l)} = \Pi(x^{(l)}, x^{(l)}, x^{(l)}) = d_l, \tag{16.}$$

$$\lim_{l=\infty} d_l = d \tag{17.}$$

ist. Die explizite Bestimmung des Wertes d und einer Folge $x_i^{(l)}$ macht gar keine Schwierigkeiten.

Man setze etwa

$$\Psi_n(s) = \sum_{i}^{0 \ldots n} b_i \cos is$$

und bestimme $b_i (i = 0, 1, \ldots n)$ so, daß

$$2 b_0^2 + \sum_{i}^{1 \ldots n} b_i^2 = 1$$

ist, während zugleich der Ausdruck

$$\Pi(b, b, b) = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} K(s,t,u)\, \Psi_n(s)\, \Psi_n(t)\, \Psi_n(u)\, ds\, dt\, du$$

sein Maximum erreicht.

Man zeigt leicht wie in I § 1, daß $\lim_{n=\infty} d_n = d$ ist und daß $\Psi_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge der verlangten Art ist. Da aus (15.)

$$|x_i^{(l)}| \leqq 1 \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{18.}$$

folgt, so kann man aus der Doppelfolge (14.) eine andere Doppelfolge

$$\xi_i^{(l)} \qquad \begin{pmatrix} l = 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, \ldots \end{pmatrix} \tag{19.}$$

extrahieren, so daß die Grenzwerte

$$\lim_{l=\infty} \xi_i^{(l)} = \xi_i \qquad (i = 0, 1, \ldots) \tag{20.}$$

existieren. Augenscheinlich ist

$$2 (\xi_0^{(l)})^2 + \sum_{i}^{1 \ldots \infty} (\xi_i^{(l)})^2 = 1, \tag{21.}$$

daher

$$2\xi_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i^2 \leqq 1. \tag{22.}$$

Ferner ist

$$\Pi(\xi^{(l)}, \xi^{(l)}, \xi^{(l)}) = \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk}\xi_i^{(l)}\xi_j^{(l)}\xi_k^{(l)} = \delta_l, \tag{23.}$$

$$\lim_{l=\infty} \delta_l = d. \tag{24.}$$

Da die Funktion $\Pi(x, x, x)$ vollstetig ist, so ist

$$\Pi(\xi, \xi, \xi) = \sum_{i,j,k}^{0\ldots\infty} a_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k = \lim_{l=\infty} \Pi(\xi^{(l)}, \xi^{(l)}, \xi^{(l)}) = d. \tag{25.}$$

Nunmehr sieht man aber auch, daß in der Beziehung (22.) das Gleichheitszeichen gilt:

$$2\xi_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i^2 = 1. \tag{26.}$$

Es sei nämlich

$$2\xi_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i^2 = h < 1.$$

Wir setzen

$$\xi_i^* = \frac{\xi_i}{\sqrt{h}} \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

und erhalten

$$2(\xi_0^*)^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} (\xi_i^*)^2 = 1, \quad \Pi(\xi^*, \xi^*, \xi^*) = \frac{d}{h\sqrt{h}} > d,$$

was ausgeschlossen ist. Es ist damit bewiesen, daß unter der Nebenbedingung (12.) die Funktion $\Pi(x, x, x)$ für die Werte

$$x_i = \xi_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

ihrer Argumente ihr Maximum erreicht.

Für beliebige Werte der Variabeln mit konvergenter Quadratsumme ist offenbar

$$[\Pi(x, x, x)]^2 - d^2\left[2x_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} x_i^2\right]^3 \leqq 0. \tag{27.}$$

Es sei $\bar{\xi}_i (i = 0, 1, \ldots)$ irgendeine Folge von Zahlen mit konvergenter Quadratsumme, ε eine dem absoluten Betrage nach beliebig kleine Zahl. Nach (27.) ist

$$[\Pi(\xi + \varepsilon\bar{\xi}, \xi + \varepsilon\bar{\xi}, \xi + \varepsilon\bar{\xi})]^2 - d^2\left[2(\xi_0 + \varepsilon\bar{\xi}_0)^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} (\xi_i + \varepsilon\bar{\xi}_i)^2\right]^3 \leqq 0 \tag{28.}$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehungen (25.) und (26.) auch

$$6\varepsilon\left[\Pi(\xi, \xi, \xi)\,\Pi(\xi, \xi, \bar{\xi}) - d^2\left(2\xi_0^2 + \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i^2\right)^2\left(2\xi_0\bar{\xi}_0 + \sum_i^{1\ldots\infty} \xi_i\bar{\xi}_i\right)\right] + ((\varepsilon^2)) \leqq 0.$$

Da ε positiv oder negativ gewählt werden kann, so folgt hieraus in bekannter Weise

$$(29.) \qquad \Pi(\xi, \xi, \bar{\xi}) = d\Big(2\xi_0\bar{\xi}_0 + \sum_{i}^{1\dots\infty} \xi_i\bar{\xi}_i\Big).$$

Die Werte ξ_i $(i = 0, 1, \dots)$ genügen dem aus (29.) sich ergebenden System unendlichvieler Gleichungen

$$(30.) \quad \begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} a_{ij0}\xi_i\xi_j = \frac{1}{2d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,u)\cos is\cos jt\,ds\,dt\,du, \\ \xi_k &= \frac{1}{d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} a_{ijk}\xi_i\xi_j = \frac{1}{d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,u)\cos is\cos jt\cos ku\,ds\,dt\,du. \end{aligned} \qquad (k=1,2,\dots)$$

Die unendliche Reihe

$$(31.) \qquad \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,x)\cos is\cos jt\,ds\,dt$$

konvergiert für alle x in dem Intervalle $(0,\pi)$ in gleichem Grade. Es ist nämlich

$$\Big|\sum_{i+j>n} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,x)\cos is\cos jt\,ds\,dt\Big|^2 = \Big|\sum_{i+j>n} b_{ij}\xi_i\xi_j\Big|^2 \leqq \sum_{i,j}^{0\dots\infty} b_{ij}^2 \sum_{i+j>n} \xi_i^2\xi_j^2.$$

Nun ist

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i+j>n} \xi_i^2\xi_j^2 = 0,$$

da ja die Doppelreihe $\sum_{i,j} \xi_i^2\xi_j^2$ konvergiert. Ferner ist

$$\sum_{i,j}^{0\dots\infty} b_{ij}^2 < \pi^2 \int_0^\pi\int_0^\pi [K(s,t,x)]^2\,ds\,dt < A_7,$$

unter A_7 eine positive Konstante verstanden. Also ist die Reihe (31.) in der Tat gleichmäßig konvergent.

Setzt man

$$(32.) \qquad \frac{\pi}{2d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,x)\cos is\cos jt\,ds\,dt = \Theta(x),$$

so ist $\Theta(x)$ eine in (0π) stetige Funktion. Nach (30.) ist

$$(33.) \quad \begin{aligned} \int_0^\pi \Theta(u)\,du &= \frac{\pi}{2d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,u)\cos is\cos jt\,ds\,dt\,du = \pi\xi_0, \\ \int_0^\pi \Theta(u)\cos ku\,du &= \frac{\pi}{2d} \sum_{i,j}^{0\dots\infty} \xi_i\xi_j \int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi K(s,t,u)\cos is\cos jt\cos ku\,ds\,dt\,du = \frac{\pi}{2}\xi_k. \end{aligned} \qquad (k=1,2,\dots)$$

Die Werte

$$(34.) \qquad \sqrt{\pi}\,\xi_0, \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\xi_k \qquad (k=1,2,\dots)$$

sind demnach *Fourier*sche Koeffizienten der stetigen Funktion $\Theta(x)$ in bezug auf das zu dem Intervalle $(0, \pi)$ gehörige Orthogonalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos ix. \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

Es ist also

$$(35.) \qquad \Theta(x) \backsim \sum_{i}^{0 \ldots \infty} \xi_i \cos ix.$$

Aus (26.) ergibt sich sogleich die Beziehung

$$(36.) \qquad \int_0^\pi [\Theta(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Es ist schließlich leicht zu sehen, daß $\Theta(x)$ *der Integralgleichung*

$$(37.) \qquad \Theta(u) = \frac{\pi}{2d} \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\, \Theta(s)\, \Theta(t)\, ds\, dt$$

genügt. Die *Fourier*schen Koeffizienten des Ausdruckes auf der rechten Seite der Formel (37.) sind nämlich gleich

$$\frac{\pi}{2d} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\, \Theta(s)\, \Theta(t)\, ds\, dt\, du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2d} \sum_{i,j}^{0 \ldots \infty} \xi_i \xi_j \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u) \cos is \cos jt\, ds\, dt\, du = \sqrt{\pi}\, \xi_0,$$

$$\frac{\pi}{2d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\, \Theta(s)\, \Theta(t) \cos ku\, ds\, dt\, du$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{d\sqrt{2}} \sum_{i,j}^{0 \ldots \infty} \xi_i \xi_j \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u) \cos is \cos jt \cos ku\, ds\, dt\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \xi_k,$$

d. h. gleich den *Fourier*schen Koeffizienten der Funktion $\Theta(x)$. Da nun sowohl $\Theta(x)$ als auch das Doppelintegral in (36.) in $(0, \pi)$ stetig sind, so gilt in der Tat die Beziehung (37.).

Aus (6.), (25.) und (35.) folgt

$$(38.) \qquad \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi K(s, t, u)\, \Theta(s)\, \Theta(t)\, \Theta(u)\, ds\, dt\, du = \Pi(\xi, \xi, \xi) = d.$$

Augenscheinlich ist d der höchste Wert, den das dreifache Integral (4.) unter der Nebenbedingung (3.) annimmt. Die Funktion $\Theta(x)$ ist eine Lösung unseres Variationsproblems.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 24

Kapitel I. Eindimensionale Variationsprobleme 30

§ 1. Lösungen mit vorgeschriebenen Endwerten. 30

§ 2. Fortsetzung 32

§ 3. Fortsetzung 36

§ 4. Periodische Lösungen 40

§ 5. Periodische Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = ke^y$ . . 45

§ 6. Ein isoperimetrisches Problem 47

Kapitel II. Zweidimensionale Variationsprobleme. Die erste Randwertaufgabe 51

§ 1. Problemstellung und vorbereitende Betrachtungen 51

§ 2. Fortsetzung 54

§ 3. Auflösung des Variationsproblems 57

§ 4. Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(x, y)\, e^u$ 61

Kapitel III. Zweidimensionale Variationsprobleme. Das zweite und das dritte Randwertproblem. Stetige Lösungen auf geschlossenen Flächen 66

§ 1. Problemstellung und vorbereitende Betrachtungen 66

§ 2. Fortsetzung 71

§ 3. Auflösung des zweiten und des dritten Randwertproblems . 74

§ 4. Stetige Lösungen auf geschlossenen singularitätenfreien Flächen 77

Kapitel IV. Auflösung einer nichtlinearen Integralgleichung . . . 79

Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles.

Par M. *E. Cartan* à Paris.

Dans un article récemment paru dans ce Journal (t. 143, p. 300), M. *Zervos* a généralisé le théorème de M. *Hilbert* sur l'impossibilité de la résolution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

par des formules de la forme

(1.) $x = f(t, w, w_1, \dots w_r), \quad y = \varphi(t, w, w_1, \dots w_r), \quad z = \psi(t, w, w_1, \dots w_r),$

où w désigne une fonction arbitraire de t et où $w_1, w_2, \dots w_r$ désignent ses dérivées successives.

Il est facile de trouver la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire un système de h équations différentielles à $h+1$ fonctions inconnues pour que sa solution générale, supposée dépendre d'une fonction arbitraire d'un argument*), soit susceptible de se mettre sous la forme indiquée plus haut, les seconds membres pouvant même contenir des *constantes arbitraires* en nombre fini.

Tout système de la nature indiquée se ramène en effet à un système S de n équations de *Pfaff* à $n+2$ variables, dont $n+1$ dépendantes et une indépendante.

Soit

(2.) $\omega_i = 0 \qquad (i=1, 2, \dots n)$

ce système de *Pfaff* et soit ω_{n+1}, ω_{n+2} deux expressions de *Pfaff* indépen-

*) La méthode s'applique du reste à tout système différentiel dont l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

dantes entre elles et indépendantes des premiers membres $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des équations du système.

Convenons de désigner par ω' le covariant bilinéaire d'une expression de *Pfaff* ω. Considérons, pour un système de *Pfaff* quelconque Σ:

(3.) $$\Omega_1 = 0, \ \Omega_2 = 0, \ldots \Omega_N = 0,$$

l'ensemble des équations de la forme

(4.) $$l_1\Omega_1 + l_2\Omega_2 + \cdots + l_N\Omega_N = 0$$

qui jouissent de la propriété définie par la congruence

$$l_1\Omega_1' + l_2\Omega_2' + \ldots + l_N\Omega_N' \equiv 0 \pmod{\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_n}.$$

Convenons d'appeler *dérivé* du système (3.) le système de *Pfaff* Σ' défini par toutes les équations (4.). On pourra de même considérer le système Σ'' dérivé de Σ' et ainsi de suite.

Dans le cas (2.), comme on a*)

$$\omega_i' \equiv c_i[\omega_{n+1}\, \omega_{n+2}] \pmod{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n}$$

le système dérivé S' est identique au système S, si tous les c_i'' sont nuls, sinon il est formé de $n-1$ équations indépendantes. Dans le premier cas le système S est complétement intégrable; nous écartons ce cas.

Nous pouvons alors supposer que le système dérivé S' est formé par les $n-1$ premières équations

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \ldots \omega_{n-1} = 0.$$

2. Désignons par $u_1, u_2, \ldots u_s$ les constantes arbitraires qui entrent dans la solution générale du système (2.) et posons

$$\chi_i = du_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots s)$$

Posons de même

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= dw - w_1\, dt, \\
\varpi_2 &= dw_1'' - w_2\, dt, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varpi_r &= dw_{r-1} - w_r dt, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il résulte de l'hypothèse faite que, si l'on tient compte des formules qui expriment les variables du système donné au moyen des u_i, de t, de w et des w_i, on a des identités de la forme

*) Je désigne pour abréger par $[\omega_{n+1}\omega_{n+2}]$ l'expression bilinéaire

$$\omega_{n+1}^d\, \omega_{n+2}^\delta - \omega_{n+1}^\delta\, \omega_{n+2}^d;$$

la congruence signifie de plus que l'égalité a lieu quand on fait

$$\omega_1^d = \cdots = \omega_n^d = \omega_1^\delta = \cdots = \omega_n^\delta = 0.$$

$$(4.)\quad \begin{cases} \omega_1 = \beta_{11}\chi_1 + \cdots + \beta_{1s}\chi_s + \alpha_{11}\varpi_1 + \alpha_{12}\varpi_2 + \cdots + \alpha_{1r}\varpi_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_n = \beta_{n1}\chi_1 + \cdots + \beta_{ns}\chi_s + \alpha_{n1}\varpi_1 + \alpha_{n2}\varpi_2 + \cdots + \alpha_{nr}\varpi_r. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces formules contiennent les expressions ϖ_i jusqu'à un certain ordre, soit ϖ_r; cela n'exclut pas la possibilité que les coefficients α_{ik} et β_{ik} dépendent de w_r, w_{r+1}, w_{r+2} etc. En tous cas les coefficients $\alpha_{1r}, \ldots \alpha_{nr}$ ne sont pas tous nuls*).

Si nous formons les covariants bilinéaires des deux membres des relations (4.), nous obtenons facilement

$$(5.)\quad \omega_i' \equiv \alpha_{ir}[dt\,\varpi_{r+1}] \quad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_r)$$

D'autre part nous avons par hypothèse

$$(6.)\quad \begin{cases} \omega_i' \equiv 0, \\ \omega_n' \equiv c[\omega_{n+1}\omega_{n+2}] \end{cases} \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n).$$

Les congruences (6.) sont vraies a fortiori par rapport aux modules $\chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_r$. Il résulte de la comparaison des formules (5.) et (6.)

$$\alpha_{1r} = \alpha_{2r} = \cdots = \alpha_{n-1,r} = 0,$$

$$\alpha_{nr}[dt\,\varpi_{r+1}] \equiv c[\omega_{n+1}\omega_{n+2}] \quad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_r).$$

On en déduit, comme ω_{n+1} et ω_{n+2} ne sont définies qu'à une substitution linéaire près, et comme α_{nr} n'est pas nul,

$$\begin{aligned} &\omega_{n+1} \equiv dt, \\ &\omega_{n+2} \equiv \varpi_{r+1} \end{aligned} \quad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_r)$$

ou encore

$$(7.)\quad \begin{aligned} &\omega_{n+1} \equiv dt + \lambda\omega_n, \\ &\omega_{n+2} \equiv \varpi_{r+1} + \mu\omega_n \end{aligned} \quad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_{r-1}).$$

3. Considérons maintenant le système S' dont les équations sont

$$\omega_1 = 0, \ldots \omega_{n-1} = 0;$$

les premiers membres de ces équations sont des combinaisons linéaires de

$$\chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_{r-1}.$$

On a, d'après (4.),

$$(8.)\quad \omega_i' \equiv \alpha_{i,r-1}[dt\,\varpi_r] \quad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \ldots \chi_s, \varpi_1, \ldots \varpi_{r-1}).\ {}^{(i=1,2,\ldots n-1)}$$

Soit, d'autre part

$$(9.)\quad \omega_i' \equiv h_i[\omega_n\omega_{n+1}] + k_i[\omega_n\omega_{n+2}] \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}).$$

---

*) Il est impossible que l'une au moins des expressions ϖ n'entre pas dans les seconds membres: sinon on verrait sans difficulté que l'intégrale générale de S ne dépendrait que de constantes arbitraires.

Ces dernières congruences auront lieu a fortiori si on prend comme modules $\chi_1, \dots \chi_s, \varpi_1, \dots \varpi_{r-1}$; elles se réduisent alors, d'après (7.), à

$$(10.)\quad \omega_i' \equiv h_i \alpha_{nr}[\varpi_r dt] + k_i \alpha_{nr}[\varpi_r \varpi_{r+1}] \qquad (\mathrm{mod}\ \chi_1, \dots \chi_s, \varpi_1, \dots \varpi_{r-1}).$$

En comparant (8.) et (10.), on voit qu'on a

$$k_i = 0, \qquad h_i = -\frac{\alpha_{i,r-1}}{\alpha_{nr}}.$$

Cela posé si tous les h_i sont nuls, le système S' est son propre dérivé et est par suite complétement intégrable; — si les h_i ne sont pas tous nuls, le système S'' est formé de $n-2$ équations; de plus, comme les covariants $\omega_1', \omega_2', \dots \omega_{n-1}'$ ne dépendent, en tenant compte des équations de S', que de ω_n et ω_{n+1}, on sait, d'après un théorème classique, que les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-1} = \omega_n = \omega_{n+1} = 0$$

sont complétement intégrables. Autrement dit on peut, au besoin par un changement de variables, supposer que *le système S' est un système de $n-1$ équations de Pfaff à $n+1$ variables, susceptible d'être mis sous une forme analogue à* (4.), *les coefficients $\alpha_{i,r-1}$ n'étant pas tous nuls.* On peut donc répéter sur le système S' le raisonnement qui a été fait sur le système S.

4. De là résulte la solution du problème proposé. Pour que la solution générale du système S soit susceptible d'être mise sous la forme voulue, il faut que *si l'on forme les systèmes dérivés successifs $S', S'', \dots$, chacun de ces systèmes contienne exactement une équation de moins que le précédent*, à moins que l'un des systèmes dérivés $S^{(n-h)}$ ne soit complétement intégrable. Dans ce cas il est évident que les systèmes dérivés suivants sont identiques à $S^{(n-h)}$. Si $S^{(i)}$ n'est pas complétement intégrable, il peut être mis sous la forme de $n-i$ équations à $n-i+2$ variables.

La condition obtenue est suffisante. Supposons d'abord qu'aucun des systèmes dérivés ne soit complétement intégrable. Alors le système $S^{(n-1)}$ contient une seule équation qu'on peut supposer être

$$\omega_1 = 0,$$

le système $S^{(n-2)}$ en contenant deux qu'on peut supposer être

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0$$

et ainsi de suite.

Le système $S^{(n-2)}$ peut être mis sous la forme d'une équation non complétement intégrable à trois variables; il est donc réductible à la forme

$$\omega_1 \equiv dy - y_1 dx = 0.$$

Le système $S^{(n-1)}$ étant dérivé de $S^{(n-2)}$, on a

$$\omega_1' = [dx\,dy_1] \equiv 0; \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2)$$

par suite ω_2 est linéaire en dx, dy et dy_1, et on peut supposer ω_2 de la forme

$$\omega_2 \equiv dy_1 - y_2 dx.$$

Le même raisonnement montre de proche en proche qu'on peut supposer $\omega_3, \ldots \omega_n$ de la forme

$$\omega_3 \equiv dy_2 - y_3 dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_n \equiv dy_{n-1} - y_n dx.$$

Par suite l'intégrale générale du système S est de la forme

$$x = t,\ y = w,\ y_1 = w_1,\ \ldots\ y_{n-1} = w_{n-1},\ y_n = w_n.$$

Supposons maintenant que le système $S^{(n-h)}$ soit complétement intégrable; il peut alors être réduit à la forme

$$dx_1 = dx_2 = \cdots = dx_h = 0.$$

Le système $S^{(n-h+1)}$ n'est pas complétement intégrable et il est à $h+3$ variables; par suite, en tenant compte des équations de $S^{(n-h)}$, en peut supposer

$$\omega_{h+1} \equiv dy - y_1 dx;$$

le raisonnement se continue ensuite comme ci-dessus et on a

$$\omega_{h+2} \equiv dy_1 - y_2 dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_n \equiv dy_{n-h-1} - y_{n-h} dx.$$

L'intégrale générale de S est alors de la forme

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ \ldots\ x_h = a_h,$$
$$x = t,\ y = w,\ y_1 = w_1,\ \ldots\ y_{n-h} = w_{n-h}.$$

Le théorème est donc complétement démontré.

Remarquons que la résolution du système S sous la forme voulue exige, dans le cas général, l'intégration d'un système complétement intégrable de h équations, suivie de la réduction d'une équation de *Pfaff* à la forme canonique

$$dy - y'dx = 0,$$

ce qui exige, comme on sait, deux opérations d'ordres 3 et 1.

5. Appliquons le théorème général précédent à l'équation différentielle

$$(11.) \qquad \frac{dz}{dx} = f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

cette équation est équivalente au système de *Pfaff* à cinq variables S*):

*) L'étude des systèmes de *Pfaff* à cinq variables a fait l'objet d'un mémoire détaillé que j'ai publié *Ann. Éc. Norm.* (3) 27 (1910), p. 109.

$$(12.)\qquad \begin{cases} \omega_1 \equiv dy - y'\,dx = 0, \\ \omega_2 \equiv dy' - y''\,dx = 0, \\ \omega_3 \equiv dz - f(x, y, z, y', y'')\,dx = 0. \end{cases}$$

Pour déterminer S', calculons $\omega_1', \omega_2', \omega_3'$. Nous avons

$$\begin{aligned} \omega_1' &\equiv 0, \\ \omega_2' &\equiv [dx\,dy''], \qquad\qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ \omega_3' &\equiv f'_{y''}[dx\,dy'']. \end{aligned}$$

Les équations du système S' sont donc

$$(13.)\qquad \begin{cases} \bar{\omega}_1 \equiv \omega_1 \equiv dy - y'\,dx = 0, \\ \bar{\omega}_2 \equiv \omega_3 - f'_{y''}\,\omega_2 \equiv dz - f'_{y''}\,dy' - (f - y''f'_{y''})\,dx = 0. \end{cases}$$

Déterminons maintenant le système dérivé S''. On a

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1' &\equiv [dx\,dy'], \\ \bar{\omega}_2' &\equiv f''_{y''^2}[dy'\,dy''] + y''f''_{y''^2}[dx\,dy''] + \lambda[dx\,dy']. \end{aligned} \qquad (\text{mod } \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$$

Pour que le système S'' soit formé d'une équation, il faut et il suffit que l'on ait

$$f''_{y''^2} = y''f''_{y''^2} = 0,$$

c'est-à-dire que *f soit linéaire par rapport à y''.*

Reciproquement si f est de la forme

$$f = y''A(x, y, z, y') + B(x, y, z, y'),$$

le système S'' sera formé d'une équation et la solution générale de l'équation (11.) sera de la forme voulue. Pour l'obtenir sous cette forme il suffira de réduire l'équation qui constitue S'' à sa forme canonique; or cette équation, tous calculs faits, est

$$dz - A\,dy' - \left(A\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial y'} - \frac{\partial A}{\partial x} - y'\frac{\partial A}{\partial y}\right)dy + \left[y'\left(A\frac{\partial B}{\partial z} - B\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial y'} - \frac{\partial A}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial A}{\partial y} - B\right]dx = 0.$$

Comme autre conséquence intéressante signalons la suivante. Le système différentiel qui détermine les courbes gauches de torsion constante donnée se ramène à un système de trois équations de *Pfaff* à cinq variables; le calcul montre immédiatement qu'il ne satisfait pas aux conditions énoncées plus haut. *Il est donc impossible d'exprimer les coordonnées d'un point de la courbe la plus générale de torsion constante par des expressions dépendant d'une manière déterminée d'un paramètre t, d'une fonction arbitraire w de t et de ses dérivées jusqu'à un certain ordre.*

$$(1^a.) \qquad \varepsilon = 1 + w_1\pi + w_2\pi^2 + \cdots$$

eine sog. Einseinheit im Körper $K(\mathfrak{p})$, d. h. eine Zahl des Körpers, deren π-adische Entwickelung mit 1 anfängt. Alle Koeffizienten $w_1, w_2, \ldots$ dieser Entwickelung sind ebenfalls $(p^f - 1)$-te Einheitswurzeln oder Null, sie sind also sämtlich Wurzeln der Gleichung

$$(1^b.) \qquad x^{p^f} - x = x^{n(\mathfrak{p})} - x = 0 \quad (\mathfrak{p}).$$

Im folgenden werde ich mich hauptsächlich mit den dritten Faktoren ε in der obigen Darstellung beschäftigen; ich werde nämlich versuchen auch sie als Potenzen einer und derselben Basis darzustellen. Zu diesem Zwecke löse ich die Aufgabe, einer beliebigen Einseinheit ε eine andere π-adische Zahl

$$f(\varepsilon) = \lg \varepsilon$$

so zuzuordnen, daß für sie die Funktionalgleichung

$$(2.) \qquad f(\varepsilon\varepsilon') = f(\varepsilon) + f(\varepsilon')$$

immer erfüllt ist.

Diese Aufgabe ist zu einem großen Teile bereits vollständig gelöst. Ist nämlich die Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ so beschaffen, daß die Ordnungszahl ihres zweiten Teiles

$$(2^a.) \qquad \xi = w_\varrho \pi^\varrho + w_{\varrho+1}\pi^{\varrho+1} + \cdots$$

größer ist als $\frac{1}{p-1}$, so habe ich in meiner Abhandlung „Über die arithmetischen Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen", Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver., Bd. 14, S. 554, und in einer demnächst in der „Festschrift für *H. A. Schwarz*" erscheinenden Abhandlung*) gezeigt, daß zu jeder solchen Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ eine eindeutig bestimmte π-adische Zahl $c = f(\varepsilon) = \lg \varepsilon$ gehört, für welche

$$(2^b.) \qquad c = \lg(1 + \xi) = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \cdots$$

ist; und unter der obigen Voraussetzung stellt diese Reihe für jedes ξ eine eindeutig bestimmte π-adische Zahl dar, welche mit ξ durch die Gleichung:

$$(2^c.) \qquad c = \xi\bar{\varepsilon} = \xi\left(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{3} - \ldots\right)$$

zusammenhängt, wo $\bar{\varepsilon}$, wie a. a. O. bewiesen wird, eine Einseinheit ist. Hiernach besitzen also ξ und c dieselbe Ordnungszahl, welche größer als

---

*) Die Exponentialdarstellung der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers für den Bereich eines Primdivisors.

$\frac{1}{p-1}$ ist. Ist $\varepsilon = 1 + \xi$ eine solche Einseinheit und c ihr Logarithmus, so besteht für sie stets die Gleichung:

$$(2^{d}.) \qquad \varepsilon = e^{c} = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^3}{3!} + \cdots,$$

wo unter der hier gemachten Voraussetzung die rechts stehende Reihe unbedingt konvergent ist. Ist umgekehrt c irgendeine π-adische Zahl, deren Ordnungszahl größer ist als $\frac{1}{p-1}$, so gehört zu ihr eine einzige π-adische Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$, für welche $e^{c} = \varepsilon$ ist. Es ergibt sich also der folgende Satz:

Alle Einseinheiten $\varepsilon = 1 + \xi$, in denen die Ordnung des zweiten Teiles ξ in bezug auf p größer als $\frac{1}{p-1}$ ist, lassen sich auf eine einzige Weise in der Form e^{c} darstellen, in welcher der Exponent c, der sog. Logarithmus von ε, durch die Gleichung

$$(3.) \qquad c = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \cdots$$

eindeutig bestimmt ist; und umgekehrt gehört zu jedem Logarithmus c, dessen Ordnung oberhalb $\frac{1}{p-1}$ liegt, eine einzige Einseinheit

$$(3^{a}.) \qquad \varepsilon = e^{c} = 1 + \frac{c}{1} + \frac{c^2}{2!} + \cdots = 1 + \xi,$$

in welcher ξ dieselbe Ordnung besitzt.

Aus der Gleichung (3.) für $\xi = \varepsilon - 1$

$$(3^{b}.) \qquad f(\varepsilon) = c = \frac{\varepsilon - 1}{1} - \frac{(\varepsilon-1)^2}{2} + \frac{(\varepsilon-1)^3}{3} - \cdots,$$

welche in ihrem Konvergenzbereiche gliedweise differenziert werden kann, ergibt sich durch Differentiation nach ε

$$(3^{c}.) \qquad f'(\varepsilon) = 1 - (\varepsilon - 1) + (\varepsilon - 1)^2 - \cdots = \frac{1}{\varepsilon},$$

und aus dieser Gleichung folgt für $\varepsilon = 1$

$$(3^{d}.) \qquad f'(1) = 1.$$

Alle Einseinheiten $\varepsilon = 1 + \xi$, welche sich in der Form e^{c} darstellen lassen, sollen daher Exponentialeinheiten genannt werden. Damit die Einseinheit $1 + \xi$ eine Exponentialeinheit sei, ist notwendig und hinreichend, daß für den Anfangsexponent ϱ ihres zweiten Teiles $\xi = w_{\varrho}\pi^{\varrho} + \cdots$

$$\frac{\varrho}{e} > \frac{1}{p-1}$$

ist, wenn e, wie stets im folgenden, die Ordnung von $\mathfrak{p}$ bedeutet, so daß $\pi \sim p^{\frac{1}{e}}$ ist. Ist also r die kleinste ganze Zahl, für welche

$$\frac{r}{e} > \frac{1}{p-1} \tag{4.}$$

ist, so sind alle und nur die Exponentialeinheiten in der Form:

$$\varepsilon = 1 + w_r \pi^r + w_{r+1} \pi^{r+1} + \cdots \tag{4a.}$$

enthalten.

Ist die zu $\mathfrak{p}$ gehörige reelle Primzahl p so groß, daß $p > e+1$ ist, so ist die obige Ungleichung (4.) schon für $r = 1$ erfüllt; alsdann sind also alle Einseinheiten Exponentialeinheiten, und für alle Zahlen $K(\alpha)$ besteht die Darstellung:

$$\alpha = \pi^a w^b e^c, \tag{5.}$$

wo c der Logarithmus der zu α gehörigen Einseinheit ist. Ist n der Grad des Körpers $K(\alpha)$, so ist stets $e \leqq n$; für die Primteiler aller oberhalb $n+1$ liegenden Primzahlen gilt also stets die Exponentialdarstellung (5.) der Zahlen α von $K(\alpha)$. Dagegen können für die in der Reihe $2, 3, \ldots (n+1)$ liegenden Primzahlen p im allgemeinen nicht alle Einseinheiten für die zugehörigen Primteiler $\mathfrak{p}$ in der Form e^c dargestellt werden; ich wende mich daher nun zu einer allgemeinen Untersuchung der Einseinheiten $\varepsilon = 1 + \xi$.

Ich stelle mir also jetzt die Aufgabe, jeder Einseinheit ε eine Zahl $c = f(\varepsilon)$ so zuzuordnen, daß stets die Funktionalgleichung (2.) a. S. 93:

$$f(\varepsilon\varepsilon') = f(\varepsilon) + f(\varepsilon') \tag{6.}$$

erfüllt ist. Für $\varepsilon' = 1$ liefert diese Gleichung:

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon) + f(1),$$

es muß also $f(1) = 0$ sein. Verlangen wir, daß auch die allgemeinere Funktion $f(\varepsilon)$ in ihrem Gültigkeitsbereiche differenzierbar sein soll, so liefert die Differentiation von (6.) nach ε'

$$\varepsilon f'(\varepsilon\varepsilon') = f'(\varepsilon'),$$

und aus ihr folgt für $\varepsilon' = 1$

$$\varepsilon f'(\varepsilon) = f'(1). \tag{6a.}$$

Wir wollen auch für diese allgemeinere Funktion $f(\varepsilon)$ die Forderung aufstellen, daß die Konstante $f'(1)$, der wir jeden beliebigen Wert beilegen

können, ebenso wie in (3ᵈ.), gleich 1 sein soll. Dann folgt aus (6ᵃ.) für $\varepsilon = 1 + \xi$, falls ξ eine positive Ordnungszahl besitzt

$$(7.) \qquad f'(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{1+\xi} = 1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \cdots,$$

und die Integration dieser Gleichung liefert für $f(\varepsilon)$ unter Berücksichtigung davon, daß $f(1) = 0$ sein muß, die schon vorher gefundene Reihe:

$$(7^a.) \qquad f(\varepsilon) = \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \cdots,$$

welche aber nun für alle diejenigen ξ gilt, für welche sie konvergiert. Umgekehrt erkennt man leicht, daß, falls $f(\varepsilon)$ durch die Gleichung (7ᵃ.), d. h. durch

$$f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - 1}{1} - \frac{(\varepsilon-1)^2}{2} + \cdots$$

für alle ε in ihrem Konvergenzbereiche definiert wird, diese Funktion der Funktionalgleichung (6.) genügt. In der Tat ergibt sich ja dann durch die immer anwendbare Differentiation:

$$(7^b.) \qquad f'(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{oder} \qquad \varepsilon f'(\varepsilon) = 1,$$

also wenn ε durch $\varepsilon\varepsilon'$ ersetzt wird, nach (7ᵇ.):

$$\varepsilon f'(\varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\varepsilon'} = f'(\varepsilon'),$$

mithin durch Multiplikation mit $d\varepsilon'$ und Integration

$$\int f'(\varepsilon\varepsilon')\, d(\varepsilon\varepsilon') = \int f'(\varepsilon')\, d\varepsilon',$$

$$f(\varepsilon\varepsilon') = f(\varepsilon') + C,$$

wo C nur von ε abhängt; und für $\varepsilon' = 1$ ergibt sich in der Tat $C = f(\varepsilon)$, d. h. das Bestehen der Funktionalgleichung (6.).

Die Funktion $f(\varepsilon) = \xi - \frac{\xi^2}{2} + \cdots$ ist nun für jede Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$, in welcher also ξ von beliebiger aber positiver Ordnung ist, unbedingt konvergent. In der Tat besitzt ja ihr allgemeines Glied $\frac{\xi^m}{m}$ (nach meiner „Zahlentheorie", Berlin 1913, S. 141) die Ordnungszahl

$$m\delta - \frac{s_{m-1} - s_m + 1}{p-1} = m\left(\delta - \frac{s_{m-1} - s_m + 1}{m(p-1)}\right),$$

in welcher s_m und s_{m-1} die p-adischen Ziffersummen von m und $(m-1)$ bedeuten, und es ist leicht zu zeigen, daß diese mit unbegrenzt wachsendem m positiv unendlich groß wird. In der obigen Differenz ist nämlich der Subtrahendus:

$$\frac{s_{m-1}-s_m+1}{m(p-1)} \leqq \frac{s_{m-1}}{m(p-1)},$$

weil $s_m \geqq 1$ ist. Ist nun:

$$m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_\nu p^\nu,$$

so ist $m \geqq p^\nu$, $s_{m-1} < (p-1)(\nu+1)$; also ist

$$\frac{s_{m-1}-s_m+1}{m(p-1)} < \frac{\nu+1}{p^\nu},$$

und da hier die rechte Seite für $\nu = \infty$ gegen Null konvergiert, so wird die Ordnungszahl von $\frac{\xi^m}{m}$ in der Tat positiv unendlich groß.

Wir erhalten also zu jeder Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ eine eindeutig bestimmte Zahl $\lg \varepsilon$, welcher der zu ε gehörige Hauptlogarithmus genannt werden soll und der mit Hilfe der Gleichung

$$\lg \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(\varepsilon-1)^i}{i}$$

leicht beliebig weit berechnet werden kann.

§ 2. *Die Beziehungen zwischen den Einseinheiten und ihren Hauptlogarithmen. Die Einheitswurzeln des Bereiches $K(\mathfrak{p})$.*

Während nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen zu jeder Einseinheit ε ein eindeutig bestimmter Hauptlogarithmus $c = \lg \varepsilon$ gehört, ist umgekehrt die Einheit ε durch ihren Hauptlogarithmus $c = \lg \varepsilon$ zunächst nur dann eindeutig bestimmt, wenn $\varepsilon = 1 + \xi = e^c = 1 + \frac{c}{1!} + \cdots$ eine Exponentialeinheit, wenn also ξ und damit auch c durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar ist. Insbesondere ist also eine Exponentialeinheit dann und nur dann gleich Eins, wenn ihr Logarithmus gleich Null ist. Ich will jetzt genauer auf die Frage eingehen, in welchem Zusammenhange die übrigen Einseinheiten ε mit ihren Hauptlogarithmen $c = \lg \varepsilon$ stehen.

Da eine Einseinheit $\bar{\varepsilon}$ stets und nur dann eine Exponentialeinheit ist, wenn

$$\bar{\varepsilon} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r}$$

ist, so folgt sofort der Satz:

Zwei Einseinheiten unterscheiden sich stets und nur dann multiplikativ um eine Exponentialeinheit, wenn sie modulo $\mathfrak{p}^r$ kongruent sind.

Denn ist

$$\varepsilon' \equiv \varepsilon \pmod{\mathfrak{p}^r} \quad \text{also} \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r},$$

so ist $\bar{\varepsilon} = e^{\bar{c}}$ eine Exponentialeinheit.

Auf Grund dieser Tatsache teile ich nun alle Einseinheiten in Klassen ein, indem ich alle und nur diejenigen in eine Klasse rechne, welche sich nur um eine Exponentialeinheit voneinander unterscheiden, welche also modulo $\mathfrak{p}^r$ kongruent sind. Hiernach ist also die Anzahl dieser Klassen gleich der Anzahl aller modulo $\mathfrak{p}^r$ inkongruenten Einseinheiten:

$$1 + w_1\pi + w_2\pi^2 + \cdots + w_{r-1}\pi^{r-1},$$

d. h. gleich

$$P = p^{f(r-1)} = n(\mathfrak{p}^{r-1}), \tag{1.}$$

also gleich einer direkt bestimmbaren Potenz von p. Da diese Klassen mit den soeben angegebenen Kongruenzklassen modulo $\mathfrak{p}^r$ übereinstimmen, bilden sie eine *Abel*sche Gruppe von der Ordnung P, deren Hauptklasse diejenige der Exponentialeinheiten ist, und es gilt daher für alle Einseinheiten der Satz:

Die P-te Potenz jeder Einseinheit ist eine Exponentialeinheit.

Es ist also für jede Einseinheit ε

$$\varepsilon^P = e^c \qquad \text{oder} \qquad P \lg \varepsilon \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}.$$

Jede Einseinheit ε_0 gehört daher zu einem Teiler P_0 von P als Exponenten, so daß P_0 die kleinste positive Zahl ist, für welche:

$$\varepsilon_0^{P_0} = e^{c_0} \qquad \text{oder} \qquad P_0 \lg \varepsilon_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^r}$$

ist. Alle Einseinheiten derselben Klasse sind modulo $\mathfrak{p}^r$ kongruent, und umgekehrt gehören alle zu einer solchen Einseinheit ε modulo $\mathfrak{p}^r$ kongruenten Einheiten ε derselben Klasse an. Ganz ebenso sind auch die Logarithmen aller Einseinheiten einer Klasse modulo $\mathfrak{p}^r$ kongruent, da aus einer Gleichung $\varepsilon' = \varepsilon e^{\pi^r g}$ durch Übergang zu den Logarithmen

$$\lg \varepsilon' = \lg \varepsilon + \pi^r g$$

folgt. Ist umgekehrt $l = \lg \varepsilon$ der Logarithmus einer Einseinheit und $l' \equiv l \pmod{\mathfrak{p}^r}$, so gibt es stets eine zu ε äquivalente Einheit ε', für welche $\lg \varepsilon' = l'$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$l' = l + \pi^r g = \lg \varepsilon + \lg e^{\pi^r g} = \lg (\varepsilon e^{\pi^r g}),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Sind somit für eine beliebige Klasse K ε_0 bzw. l_0 die kleinsten Reste, welche alle ihre Einseinheiten bzw. alle ihre Logarithmen modulo $\mathfrak{p}^r$ lassen, so enthält K auch die Einheit ε_0, und ebenso kommt unter den Logarithmen von K auch dieser reduzierte Logarithmus l_0 vor. Es werde ε_0 die reduzierte Einheit, l_0 der reduzierte Logarithmus der Klasse K genannt.

Durch diese kurzen Betrachtungen sind wir in den Stand gesetzt zu entscheiden, ob und wann zwei verschiedene Einseinheiten ε und ε' denselben Hauptlogarithmus haben. Dies ist nämlich offenbar stets und nur dann der Fall, wenn die aus ihnen gebildete Einseinheit

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \omega$$

den Hauptlogarithmus Null hat. Ist diese Einheit ω eine Exponentialeinheit, gehören also ε' und ε derselben Klasse an, so ist dies, wie wir sahen, nur dann möglich, wenn $\omega = 1$, wenn also $\varepsilon' = \varepsilon$ ist. Zwei Einseinheiten derselben Klasse haben also niemals denselben Hauptlogarithmus. Sind dagegen ε' und ε Einheiten verschiedener Klassen, so kann ihr Quotient ω den Logarithmus Null haben. Gehört aber dann ω etwa zum Exponenten P_0, so ist ω^{P_0} eine Exponentialeinheit, welche ebenfalls den Hauptlogarithmus Null hat, also gleich Eins ist, d. h. es ist $\omega^{P_0} = 1$, oder ω eine P_0-te Einheitswurzel. Diese Zahl ist aber auch eine primitive P_0-te Einheitswurzel; denn wäre etwa schon $\omega^{\bar{P}} = 1$, wo $\bar{P}$ ein eigentlicher Teiler von P_0 ist, so würde ja schon $\omega^{\bar{P}} = e^0$ eine Exponentialeinheit sein gegen unsere Voraussetzung.

Zwei Einseinheiten haben also stets und nur dann gleiche Logarithmen, wenn sie sich um eine Einheitswurzel unterscheiden, deren Ordnung ein Teiler von P, also eine Potenz von p ist.

Es handelt sich also nur noch darum, alle Einseinheiten aufzusuchen, welche Einheitswurzeln sind. Diese Frage läßt sich leicht lösen: In jeder der P Klassen gibt es höchstens eine solche Einheitswurzel, und da ihr Logarithmus gleich Null ist, so muß der dieser Klasse zugehörige modulo $\mathfrak{p}^r$ reduzierte Logarithmus gleich Null sein; ist dies der Fall, so ist die diesem Logarithmus zugehörige Einseinheit die gesuchte Einheitswurzel in dieser Klasse. Alle und nur die verschiedenen Einheitswurzeln innerhalb $K(\mathfrak{p})$ sind also diejenigen modulo $\mathfrak{p}^r$ incongruenten Einseinheiten, deren Logarithmen gleich Null sind. Sie können durch eine endliche Anzahl von Versuchen ohne besondere Schwierigkeit gefunden werden.

Es sei nun ω_0 diejenige unter diesen Einheitswurzeln, deren Ordnung P_0 möglichst groß ist. Dann enthält der Körper $K(\mathfrak{p})$ alle und nur die P_0-ten Einheitswurzeln

$$(2.) \qquad 1, \omega_0, \omega_0^2, \ldots \omega_0^{P_0-1}$$

und keine anderen; denn die Ordnung jeder anderen Einheitswurzel $\bar{\omega}$ von $K(\mathfrak{p})$ müßte ja gleich oder kleiner als die Ordnung von ω_0, d. h. sie müßte ein Teiler von P_0 sein; $\bar{\omega}$ wäre daher sicher eine P_0-te Einheitswurzel, sie müßte also, da die Gleichung

$$(2^a.) \qquad x^{P_0} - 1 = 0 \ (\mathfrak{p})$$

im Körper $K(\mathfrak{p})$ nicht mehr als P_0 Wurzeln besitzen kann, gleich einer der Zahlen (2.) sein.

Dieselbe Betrachtung lehrt endlich, daß der Körper $K(\mathfrak{p})$ stets und nur dann alle P_0-ten Einheitswurzeln und keine anderen enthält, wenn die Anzahl derjenigen reduzierten Logarithmen, welche gleich Null sind, genau gleich P_0 ist.

§ 3. *Die Darstellung aller Logarithmen eines Körpers $K(\mathfrak{p})$ durch ein Fundamentalsystem.*

Die Logarithmen $l = \lg \varepsilon$ aller Einseinheiten des Körpers $K(\mathfrak{p})$ lassen sich auf eine einzige Weise additiv durch

$$(1.) \qquad ef = \lambda$$

unter ihnen mit ganzzahligen p-adischen Koeffizienten darstellen. Zum Beweise dieses wichtigen Satzes führen die folgenden Überlegungen:

Es sei

$$(2.) \qquad l_1, l_2, \dots l_\lambda$$

ein System von λ beliebigen Logarithmen in $K(\mathfrak{p})$, und es mögen allgemein:

$$(2^a.) \qquad l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots l_\lambda^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \dots \lambda - 1)$$

die ef zu ihnen konjugierten algebraischen Zahlen von $K(\mathfrak{p})$ bedeuten. Dann soll die aus ihnen gebildete Determinante:

$$(2^b.) \qquad R(l_1, l_2, \dots l_\lambda) = \begin{vmatrix} l_1, & l_2 & , \dots & l_\lambda \\ l_1', & l_2' & , \dots & l_\lambda' \\ \vdots & & & \\ l_1^{(\lambda-1)}, & l_2^{(\lambda-1)}, & \dots & l_\lambda^{(\lambda-1)} \end{vmatrix},$$

deren Quadrat offenbar eine rationale p-adische Zahl ist, nach einer verwandten Bezeichnung von *R. Dedekind* der Regulator des Systemes $(l_1, l_2, \dots l_\lambda)$ genannt werden. Ist $R(l_i) \gtrless 0$, sind also die λ Zahlen (l_i) unabhängig voneinander, so ist jeder andere Logarithmus l als homogene lineare Funktion dieser λ Zahlen mit rationalen ganzen oder gebrochenen Koeffizienten eindeutig darstellbar; denn aus den λ Gleichungen:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} l &= u_1 l_1 + u_2 l_2 + \cdots + u_\lambda l_\lambda, \\ l' &= u_1 l_1' + u_2 l_2' + \cdots + u_\lambda l_\lambda', \\ &\vdots \\ l^{(\lambda-1)} &= u_1 l_1^{(\lambda-1)} + u_2 l_2^{(\lambda-1)} + \cdots + u_\lambda l_\lambda^{(\lambda-1)} \end{aligned}$$

bestimmen sich ja die Unbekannten u_i eindeutig, da $|l_i^{(k)}| \gtrless 0$ ist, und als rationale p-adische Zahlen, weil diese Gleichungen, also auch ihre eindeutig bestimmten Lösungen, bei jeder Permutation der λ zu $K(\mathfrak{p})$ konjugierten Körper ungeändert bleiben.

Es sei nun speziell $(l_1, l_2, \ldots l_\lambda)$ ein System unabhängiger Logarithmen, deren Regulator $R(l_i)$ von möglichst niedriger Ordnung in p ist. Ein solches System soll ein Fundamentalsystem für die Hauptlogarithmen von $K(\mathfrak{p})$ genannt werden. Dann kann jeder andere Logarithmus l durch dieses System eindeutig in der Form:

$$l = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda$$

mit ganzzahligen p-adischen Koeffizienten dargestellt werden. In der Tat, wäre dies für einen dieser Logarithmen l nicht der Fall, und wäre hier etwa c_1 von negativer Ordnung in p, so würde ja der Regulator des Systemes $(l, l_2, \ldots l_\lambda)$ mit demjenigen von $(l_1, l_2, \ldots l_\lambda)$ offenbar durch die Gleichung:

$$R(l, l_2, \ldots l_\lambda) = c_1 \cdot R(l_1, l_2, \ldots l_\lambda)$$

zusammenhängen, also sicher von niedrigerer Ordnung in p als jener sein, was gegen unsere Voraussetzung verstößt.

Es ist leicht, für einen beliebigen Körper $K(\mathfrak{p})$ ein solches Fundamentalsystem für alle Hauptlogarithmen zu bilden: In jedem Falle sind nämlich die $ef = \lambda$ Zahlen:

$$(4.)\qquad (l_i) = (w^g \pi^h)_{\substack{g=0,1,\ldots f-1 \\ h=r, r+1, \ldots r+e-1}}$$

Logarithmen innerhalb $K(\mathfrak{p})$, da sie ja Multipla von $\mathfrak{p}^r$, also sogar Logarithmen von Exponentialeinheiten sind; ferner sind sie linear unabhängig, da sie eine Basis für alle Multipla von $\mathfrak{p}^r$ innerhalb $K(\mathfrak{p})$ bilden. Ist speziell $r = 1$, sind also alle Einseinheiten Exponentialeinheiten, so ist auch jeder Logarithmus, d. h. jede durch $\mathfrak{p}$ teilbare Zahl von $K(\mathfrak{p})$ ganzzahlig durch dieses System darstellbar; in diesem Falle ist also $(l_1, l_2, \ldots l_\lambda)$ bereits ein Fundamentalsystem.

Ist dagegen $r > 1$, so drücken sich allein die Logarithmen l der Einseinheiten $\varepsilon = \omega_0^g e^l$, welche ja alle und nur die Multipla von $\mathfrak{p}^r$ sind,

ganzzahlig durch dieses System aus, nicht aber diejenigen der übrigen Klassen, deren Logarithmen nicht durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar sind. Ist nun K irgendeine solche Klasse, l der Logarithmus irgendeiner in ihr enthaltenen Einseinheit ε und

$$l = u_1 l_1 + u_2 l_2 + \cdots + u_\lambda l_\lambda$$

seine Darstellung durch das obige System, so muß mindestens einer der Koeffizienten u_i, etwa u_1, von negativer Ordnung in bezug auf p sein. Ersetzt man dann wie oben in jenem System das erste Element l_1 durch l, so besitzt das neue System $(l, l_2, \ldots l_\lambda)$ den Regulator $u_1 \cdot R(l_1, \ldots l_\lambda)$, welcher von niedrigerer Ordnung in p ist; und durch dieses System $(l, l_2, \ldots l_\lambda)$ lassen sich die Logarithmen aller Einheiten $\omega_0^g e^i$ und diejenigen $\omega_0^g \varepsilon e^i$ ganzzahlig darstellen. Fährt man in derselben Weise fort, so gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Reduktionen zu einem Fundamentalsystem.

Ist $(l_1, l_2, \ldots l_\lambda)$ ein solches Fundamentalsystem, $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots \bar{l}_\lambda)$ irgendein anderes System von λ Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$, so ist das letztere stets und nur dann ebenfalls ein Fundamentalsystem, wenn die λ ganzzahligen Substitutionsgleichungen:

$$\bar{l}_i = \Sigma u_{ik} l_k$$

ganzzahlig nach den l_k aufgelöst werden können, wenn also die Determinante $|u_{ik}|$ eine Einheit modulo p ist. Da die Regulatoren jener beiden Systeme offenbar durch die Gleichung:

$$R(\bar{l}_i) = |u_{ik}| \cdot R(l_i) \tag{5.}$$

miteinander zusammenhängen, so kann dieses Resultat in dem folgenden Satze ausgesprochen werden:

> Ein System von λ Logarithmen ist stets und nur dann ein Fundamentalsystem für alle Logarithmen des Bereiches $K(\mathfrak{p})$, wenn sein Regulator von möglichst niedriger Ordnung in p ist.

§ 4. *Die Exponentialdarstellung der Einseinheiten.*

Auf Grund der Ergebnisse des letzten Paragraphen zeige ich nun, daß zu jedem Logarithmus

$$c = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda \tag{1.}$$

mit beliebigen ganzzahligen p-adischen Koeffizienten c_i ein Numerus, d. h. wenigstens eine Einseinheit ε gehört, welche gerade diesen Logarithmus c besitzt. Zunächst entspricht jedem der λ Basiselemente l_i des Fundamental-

systemes $(l_1, \dots l_\lambda)$ mindestens eine Einseinheit als Numerus. In der Tat ist dies ja zunächst für die λ Elemente $w^g \pi^h$ in (4.) a. S. 121 der Fall, denn zu ihnen gehören ja die Numeri $e^{w^g \pi^h}$, ferner gilt dasselbe für die Einseinheiten der verschiedenen Klassen, und aus diesen allein setzte sich ja das Fundamentalsystem $(l_1, \dots l_\lambda)$ zusammen.

Es sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\lambda$ je eine derjenigen Einseinheiten, deren Logarithmen $(l_1, l_2, \dots l_\lambda)$ sind, und es sei ε eine unter ihnen, l ihr Logarithmus. Ist dann zunächst $\varepsilon = e^l$ eine Exponentialeinheit und bedeutet c irgendeine ganze p-adische Zahl, so gehört auch zum Logarithmus cl die eindeutig bestimmte Exponentialeinheit:

$$e^{cl} = 1 + \frac{cl}{1} + \frac{c^2 l^2}{2!} + \cdots,$$

welche ich immer durch ε^c bezeichnen will. Ist dagegen ε selbst keine Exponentialeinheit, sondern ist erst $\varepsilon^P = e^{Pl}$ eine solche, so gehört zum Logarithmus cl wieder eine bestimmte Einseinheit als Numerus. Ist nämlich $c = c_0 + P\bar{c}$, wo c_0 den kleinsten Rest von c modulo P, also eine ganze rationale Zahl, bedeutet, so besitzt die Einseinheit $\varepsilon^{c_0}(\varepsilon^P)^{\bar{c}}$ den Logarithmus

$$c_0 l + Pl\bar{c} = l(c_0 + P\bar{c}) = lc,$$

w. z. b. w. Auch hier will ich die so bestimmte zum Logarithmus lc gehörige Einseinheit durch ε^c bezeichnen. Hieraus folgt sofort, daß die zu $l \cdot 0 = 0$ gehörige Einseinheit gleich ε^0, d. h. gleich $\lim\limits_{k=\infty} \varepsilon^{p^k}$ sein muß, und da dieser Grenzwert gleich 1 wird, so folgt, daß stets $\varepsilon^0 = 1$ ist.

Es sei nun c ein beliebiger Logarithmus innerhalb $K(\mathfrak{p})$ und

(2.) $$c = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda$$

seine Darstellung durch unser Fundamentalsystem; dann gehört zu ihm offenbar die Einseinheit

(2ª.) $$\varepsilon = \varepsilon_1^{c_1} \varepsilon_2^{c_2} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda}$$

als Numerus. Ebenso also, wie zu jeder Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ ein Logarithmus $c = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} - \cdots$ gehört, so entspricht auch umgekehrt jedem Logarithmus c wenigstens eine Einseinheit als Numerus. Während aber die erste Beziehung eindeutig war, entsprechen jedem Logarithmus, wie wir sahen, stets genau P_0 Numeri, welche sich um P_0-te Einheitswurzeln voneinander unterscheiden. So sind also auch die λ Einseinheiten

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\lambda$, welche zu dem Fundamentalsystem $l_1, l_2, \ldots l_\lambda$ der Logarithmen gehören, nur bis auf je eine solche Einheitswurzel bestimmt. Wir könnten uns diese Einheiten ε_i ein für alle Male willkürlich aber fest ausgewählt denken, doch wollen wir der größeren Einfachheit halber schon hier Folgendes festsetzen: Ist l_i einer dieser λ Logarithmen, so gehören ja zu ihm genau die P_0 konjugierten Einseinheiten als Numeri, welche sich von einem von ihnen um je eine P_0-te Einheitswurzel unterscheiden. Unter diesen sei nun die Einheit ε_i so ausgewählt, daß sie zu einem möglichst niedrigen Exponenten $\mathfrak{P}_i$ gehört, so daß also

$$\varepsilon_i^{\mathfrak{P}_i} = e^{\mathfrak{Q}_i} \tag{3.}$$

eine Exponentialeinheit ist, während keine Potenz einer konjugierten Einheit ε_i' mit kleinerem Exponenten eine Exponentialeinheit ist. Ist der Logarithmus l_i selbst durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar, so gehört zu ihm eine einzige Exponentialeinheit $\varepsilon_i = e^{l_i}$ als Numerus, und gerade sie wird durch unsere Vorschrift aus den P_0 konjugierten ausgewählt. Ist $\mathfrak{P}_i \geqq P_0$, so gilt die obige Gleichung für jede der P_0 konjugierten Einseinheiten.

Aus diesen Betrachtungen folgt jetzt leicht, daß jede Einseinheit ε auf eine einzige Art als Exponentialgröße dargestellt werden kann. Ist nämlich $\varepsilon = 1 + \xi$ ganz beliebig gegeben und

$$\lg \varepsilon = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \cdots = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda$$

die Darstellung ihres Logarithmus durch unser Fundamentalsystem, so haben ε und

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1^{c_1} \varepsilon_2^{c_2} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda}$$

denselben Logarithmus; sie können sich somit nur um eine P_0-te Einheitswurzel unterscheiden, d. h. es muß:

$$\varepsilon = \omega^{\beta_0} \varepsilon_1^{c_1} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda} = \omega^{\beta} \varepsilon_0 \tag{4.}$$

sein. Die hier noch unbekannte Einheitswurzel bestimmt sich eindeutig aus der Kongruenz:

$$\omega^{\beta_0} \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \pmod{\mathfrak{p}^r}, \tag{4a.}$$

weil ja alle P_0 Einheitswurzeln zu verschiedenen Klassen gehören, also modulo $\mathfrak{p}^r$ inkongruent sind.

Hiernach ergibt sich endlich für jede Zahl α des Körpers $K(\mathfrak{p})$ die folgende Exponentialdarstellung

$$\alpha = \pi^a (w^\beta \omega^{\beta_0}) \cdot (\varepsilon_1^{c_1} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda}) = \pi^a v^b \varepsilon_1^{c_1} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda}, \tag{5.}$$

wo jetzt v eine primitive $B=(n(\mathfrak{p})-1)\cdot P_0$-te Einheitswurzel bedeutet, durch deren B Potenzen v^b für $b=0, 1, \dots B-1$ alle Potenzen $w^\beta \omega^{\beta_0}$ und nur sie dargestellt werden.

Diese Darstellung ist eindeutig; es besteht nämlich zunächst der folgende Satz:

Eine Zahl $\alpha=\pi^a v^b \varepsilon_1^{c_1}\cdots\varepsilon_\lambda^{c_\lambda}$ ist dann und nur dann gleich 1, wenn

$$a=0, \quad b\equiv 0 \pmod{B}, \quad c_1=c_2=\cdots=c_\lambda=0$$

ist.

Ist nämlich $C=[B, \mathfrak{P}_1, \dots \mathfrak{P}_\lambda]$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen B und $\mathfrak{P}_i$, so daß also:

$$v^C=1, \quad \varepsilon_i^C=e^{Cl_i}$$

ist, so folgt aus der Gleichung:

$$\alpha^C=\pi^{aC}\cdot e^{C(l_1c_1+l_2c_2+\cdots l_\lambda c_\lambda)}=1$$

zunächst, daß Ca, also auch $a=0$ sein muß, und zweitens, daß $C(l_1c_1+\cdots+l_\lambda c_\lambda)=0$, daß also auch $c_1=c_2=\cdots=c_\lambda=0$ ist. Also ist auch jedes $\varepsilon_i^{c_i}=\varepsilon_i^0=1$, und es muß also $\alpha=v^b=1$, d. h. b durch B teilbar sein.

Hieraus ergibt sich sofort, daß nur dann:

$$\alpha=\pi^a v^b \varepsilon_1^{c_1}\cdots\varepsilon_\lambda^{c_\lambda}=\pi^{a'} v^{b'} \varepsilon_1^{c_1'}\cdots\varepsilon_\lambda^{c_\lambda'}=\alpha'$$

sein kann, wenn

$$a=a', \quad b\equiv b' \pmod{B}, \quad c_i=c_i' \qquad (i=1, 2, \dots \lambda)$$

ist; in der Tat muß ja $\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\pi^{a'-a}v^{b'-b}\cdot\varepsilon^{c_1'-c_1}\cdots\varepsilon_\lambda^{c_\lambda'-c_\lambda}=1$ sein, und dies zieht die obigen Gleichungen notwendig nach sich.

Im folgenden will ich allgemein die vorher bestimmte Einseinheit ε_i, welche den Logarithmus l_i besitzt, durch e^{l_i} bezeichnen. Ist ε_i eine Exponentialeinheit, so besteht diese Gleichung $\varepsilon_i=e^{l_i}$ in der ursprünglichen Bedeutung, wo e^{l_i} durch die Reihe $1+\dfrac{l_i}{1!}+\dfrac{l_i^2}{2!}+\cdots$ definiert ist. Ist dagegen ε_i keine solche Exponentialeinheit, so wird eben das neue Symbol e^{l_i} durch die Gleichung $e^{l_i}=\varepsilon_i$ definiert. Sind ferner $\varepsilon_i=e^{l_i}$, $\varepsilon_k=e^{l_k}$ zwei gleiche oder verschiedene unter diesen Einseinheiten, so soll das Produkt $\varepsilon_i\varepsilon_k$ bzw. der Quotient $\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}$ durch $e^{l_i+l_k}$ bzw. $e^{l_i-l_k}$ bezeichnet werden, und das Entsprechende soll für das Produkt beliebig vieler Faktoren gelten. Ist also c_i eine beliebige ganze rationale oder p-adische Zahl so bezeichnen

wir immer die Zahl $\varepsilon_i^{c_i}$ durch $e^{c_i l_i}$; ist endlich c ein beliebiger Logarithmus und ist

$$c = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \cdots + c_\lambda l_\lambda ,$$

seine Darstellung durch unser Fundamentalsystem, so verstehen wir unter e^c die eindeutig bestimmte Einseinheit

$$e^c = e^{c_1 l_1 + \cdots + c_\lambda l_\lambda} = (e^{l_1})^{c_1} \cdots (e^{l_\lambda})^{c_\lambda} = \varepsilon_1^{c_1} \cdots \varepsilon_\lambda^{c_\lambda} ,$$

welche gerade diesen Logarithmus c besitzt.

Zu jeder Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ gehört so ein eindeutig bestimmter Logarithmus $c = \lg \varepsilon = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \cdots$, und umgekehrt, zu jedem Logarithmus c genau P_0 Numeri

$$\varepsilon^{(k)} = \omega^k \cdot e^c . \qquad (k = 0, 1, \ldots P_0 - 1)$$

Endlich ist jetzt jede Zahl α des Körpers $K(\mathfrak{p})$ in der folgenden Exponentialdarstellung

$$\alpha = \pi^a v^b e^c$$

enthalten; hier wollen wir a die Ordnungszahl, b den Index, c den Hauptlogarithmus von α nennen. Dann läßt sich der soeben bewiesene Satz jetzt folgendermaßen einfacher aussprechen:

> Zwei Zahlen $\alpha = \pi^a v^b e^c$ und $\alpha' = \pi^{a'} v^{b'} e^{c'}$ sind stets und nur dann gleich, wenn ihre Indizes modulo B kongruent, ihre Ordnungszahlen und Hauptlogarithmen aber gleich sind.

§ 5. Beispiele. *Untersuchung des Körpers $K(1)$ der rationalen Zahlen und des allgemeinen quadratischen Zahlkörpers $K(\sqrt{D})$.*

Im Gebiete der rationalen Zahlen ist jede Zahl α für den Bereich einer beliebigen Primzahl p eindeutig in der Form:

$$\alpha = p^a w^b \varepsilon \qquad (p)$$

darstellbar, wo w eine primitive $(p-1)$-te Einheitswurzel und

$$\varepsilon = 1 + e_1 p + e_2 p^2 + \cdots \qquad (p)$$

eine Einseinheit bedeutet. Da hier für jede ungerade Primzahl p $\frac{1}{p-1} < 1$ ist, so ist für alle diese Bereiche $K(p)$ jede Einseinheit $\varepsilon = e^c$ eine Exponentialeinheit; für jede ungerade Primzahl ist also

$$\alpha = p^a w^b e^c \qquad (p),$$

wo c eine durch p teilbare p-adische Zahl bedeutet.

Ist dagegen $p = 2$ also $\frac{1}{p-1} = 1$, so ist eine dyadische Einseinheit

$$\varepsilon = 1 + 2e_1 + 2^2 e_2 + \cdots$$

stets und nur dann eine Exponentialeinheit, wenn $e_1 = 0$ ist. Hier zerfallen also die dyadischen Einseinheiten in zwei Klassen, K_0 und K_1, von denen die erste alle und nur die Exponentialeinheiten $\varepsilon = e^c$ enthält, für welche $e_1 = 0$ ist, die also die Form $4n+1$ haben, während K_1 aus den Einseinheiten von der Form $4n+3$ besteht, für welche $e_1 = 1$ ist.

Für jede Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi = 1 + (e_1 \cdot 2 + \cdots)$, mag sie zu K_0 oder K_1 gehören, ist nun ihr Logarithmus:

$$\lg \varepsilon = \frac{\xi}{1} - \frac{\xi^2}{2} + \cdots \equiv \xi - \frac{\xi^2}{2} \equiv 2(e_1 - e_1^2) \equiv 0 \pmod{2^2}.$$

Also gibt es unter den Einheiten von K_1 $(e_1 = 1)$ eine einzige, deren Logarithmus gleich 0, welche also eine Einheitswurzel ist; und dies ist die zweite Einheitswurzel $-1 = 1 - 2$; man bestätigt auch leicht durch Ausrechnung, daß

$$\lg(-1) = -\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots\right) \quad (2)$$

mit beliebiger Annäherung für den Bereich von 2 gleich Null ist.

Da in diesem Falle die $(p-1)$-te Einheitswurzel gleich $+1$ ist, so erhält man für jede rationale dyadische Zahl die allgemeine Darstellung:

$$\alpha = 2^a(-1)^b e^c ,$$

wo c eine durch 4 teilbare dyadische Zahl ist. So erscheint im Körper $K(1)$ die Primzahl 2 als einzige Ausnahmezahl.

Es sei nun zweitens

(1.) $$x^2 = D$$

eine quadratische Gleichung, welche einen beliebigen quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ definiert; hier kann und soll D ohne gleiche Faktoren vorausgesetzt werden. Ist dann $\mathfrak{p}$ ein zu der reellen Primzahl p gehöriger Primdivisor, so ist für den Bereich von $\mathfrak{p}$ jede Zahl a des Körpers in der Form:

(2.) $$\alpha = \pi^a w^b \varepsilon$$

darstellbar, wo $\varepsilon = 1 + w_1\pi + w_2\pi^2 + \cdots$ eine beliebige Einseinheit bedeutet. Hier können e, f und $ef = \lambda$ nur die Werte 1 und 2 haben, und zwar ist e stets und nur dann gleich 2, wenn p ein Diskriminantenteiler, also ein Divisor von D oder ev. gleich 2 ist.

Ist zuerst p kein Diskriminantenteiler, also $e = 1$, so ist $\pi = p$, und jede Einseinheit

$$\varepsilon = 1 + \xi = 1 + (w_1 p + w_2 p^2 + \cdots)$$

ist sicher eine Exponentialeinheit, sobald $p > 2$ ist, weil dann stets $\frac{1}{p-1} < 1$, also die Ordnung von ξ, welche ja mindestens 1 sein muß, immer größer als $\frac{1}{p-1}$ ist. Für die Primteiler aller ungeraden Primzahlen ist also stets:

$$(2^a.) \qquad \alpha = \pi^a w^b e^c,$$

wo e^c eine Exponentialeinheit ist; nur der Fall $p = 2$ ist also hier noch genauer zu untersuchen.

Ist dagegen p Diskriminantenteiler, so ist $\pi \sim p^{\frac{1}{2}}$, und für jede Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi$ besitzt $\xi = w_1\pi + w_2\pi^2 + \cdots$ mindestens die Ordnung $\frac{1}{2}$. Ist dann $p > 3$, also mindestens gleich 5, so ist $\frac{1}{p-1} < \frac{1}{2}$, also jede Einseinheit $\varepsilon = 1 + \xi = e^c$ eine Exponentialeinheit. Für alle Primteiler $\mathfrak{p}$, außer denen von 2 und 3, ist also stets $\alpha = \pi^a w^b e^c$; hier sind mithin nur die Primteiler von 2 und 3 weiter zu betrachten.

Es sei nun zuerst p kein Diskriminantenteiler, so muß ja nur $p = 2$ untersucht werden; dann ist also $D = 8n + 1$ oder $8n + 5$. Nur der letzte Fall braucht hier betrachtet zu werden, da im ersten $2 \sim \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ das Produkt zweier verschiedenen Primfaktoren ist, und jeder der beiden Körper $K(\mathfrak{p})$ und $K(\mathfrak{p}')$ aus den rationalen p-adischen Zahlen besteht, für welche, wie oben bewiesen wurde, stets $\alpha = 2^a(-1)^b e^c$ ist.

Ist nun $D = 8n + 5$, so ist ja $\pi = 2$, $f = 2$, und in der Darstellung

$$\alpha = 2^a w^b \varepsilon = 2^a w^b (1 + w_1 \cdot 2 + w_2 \cdot 2^2 + \cdots)$$

ist w eine primitive Einheitswurzel vom Grade $2^2 - 1 = 3$. Da hier $r > \frac{1}{2-1}$, d. h. $r = 2$ sein muß, so sind die Einseinheiten

$$\varepsilon = 1 + \xi = 1 + w_1 \cdot 2 + w_2 \cdot 2^2 + \cdots$$

und ihre Logarithmen nur modulo 2^2 zu untersuchen. Nun ist offenbar:

$$(3.) \quad \varepsilon \equiv 1 + 2w_1, \quad \lg \varepsilon \equiv \xi - \frac{\xi^2}{2} \equiv 2(w_1 - w_1^2) \pmod 4.$$

Da w_1 nur die vier Werte $0, 1, w, w^2$ annehmen kann, so ist die Anzahl der Klassen von Einseinheiten gleich 4; es ist also für jede Einseinheit ε mindestens ihre vierte Potenz eine Exponentialeinheit. Legt man aber in den beiden Kongruenzen (3.) w_1 die obigen vier Werte bei, so ergeben sich für ε und $\lg \varepsilon$ die folgenden Kongruenzwerte:

$$(4.)\qquad \begin{matrix} \varepsilon \equiv 1, & 3, & 1+2w, & 1+2w^2, \\ \lg \varepsilon \equiv 0, & 0, & 2\ , & 2 \end{matrix} \qquad (\text{mod. } 4).$$

Also enthält $K(\mathfrak{p})$ nur die eine Einheitswurzel -1, und es existiert eine Einheit $\varepsilon_1 \equiv 1+2w$ (mod. 4), deren Logarithmus gleich 2 ist, so daß also $\varepsilon_1 = e^2$ gesetzt werden kann. Nimmt man endlich zu der Basis $(2^2, w\cdot 2^2)$ für die Logarithmen aller Exponentialeinheiten noch diesen Logarithmus $l_1 = 2$ hinzu, so ergibt sich aus dem Systeme $(2, 4, 4w)$ als Fundamentalsystem für alle Logarithmen von $K(\mathfrak{p})$ $(2, 4w)$, zu denen die Einheiten

$$\varepsilon_1 \equiv 1+2w \quad (\text{mod. } 4), \qquad \varepsilon_2 \equiv 1+4w \quad (\text{mod. } 8)$$

gehören. Jede Zahl α des Körpers $K(\mathfrak{p})$ läßt sich also eindeutig in der Form:

$$(5.)\qquad \alpha = 2^a v^b e^c = 2^a v^b e^{2c_1+4wc_2} = 2^a \cdot v^b \cdot \varepsilon_1^{c_1}\varepsilon_2^{c_2}$$

darstellen, wo v eine $2\cdot 3 = 6$-te primitive Einheitswurzel bedeutet; für ε_1 und ε_2 können die reduzierten Einseinheiten

$$\varepsilon_1 = 1+2w = \sqrt{-3}, \quad \varepsilon_2 = 1+4w = -1+2\sqrt{-3}$$

gewählt werden, weil der zu ihren Logarithmen gehörige Regulator offenbar dieselbe Ordnungszahl 8 besitzt, wie derjenige des Systemes $(2, 4w)$.

Es sei jetzt zweitens p ein Diskriminantenteiler, also $\pi \sim p^{\frac{1}{2}}$. Dann brauchen, wie oben erwähnt, nur die beiden kleinsten Primzahlen 3 und 2 untersucht zu werden. Ist zunächst $p=3$ ein Diskriminantenteiler, so muß $D = 3D_0$ und $D_0 \equiv +1$ oder -1 modulo 3 sein. Hier ist also $D = \pm 3\cdot E^2$ (3), wo E eine rationale triadische Einheit bedeutet. In diesen beiden unterschiedenen Fällen ist daher $\sqrt{D} = E\sqrt{\pm 3}$, also

$$\pi = \sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad \pi = \sqrt{-3}$$

eine Primzahl im Körper $K(\mathfrak{p})$, und jede Zahl α desselben ist eindeutig in der Form:

$$\alpha = \pi^a(-1)^b\varepsilon \qquad (\mathfrak{p})$$

darstellbar, wo

$$\varepsilon = 1 + w_1\pi + w_2\pi^2 + \cdots \qquad (\mathfrak{p})$$

eine Einseinheit bedeutet, deren Koeffizienten w_i die Werte $0, \pm 1$ besitzen können. Da hier $\frac{1}{p-1} = \frac{1}{2}$ wird, so ist ε nur dann eine Exponentialeinheit, wenn $\varepsilon_1 = 0$ wird; die Klassenzahl der Einseinheiten ist also gleich 3, und die Einheiten nebst ihren Logarithmen brauchen nur modulo $\mathfrak{p}^r = \mathfrak{p}^2 \sim 3$ untersucht zu werden. Nun ist offenbar für jede Einseinheit $\varepsilon = 1+\xi$

(6.) $\varepsilon \equiv 1 + w_1\pi, \quad \lg\varepsilon \equiv w_1\pi + \frac{w_1^3\pi^3}{3} \equiv w_1\pi\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right) \pmod{\mathfrak{p}^2}.$

Ersetzt man also hier w_1 durch $0, +1, -1$ und beachtet, daß in den beiden unterschiedenen Fällen $\frac{\pi^2}{3} = \pm 1$ ist, so ergibt sich für

(7.) $\varepsilon \equiv 1, \quad 1+\pi, \quad 1-\pi \pmod{\mathfrak{p}^2}$

im Falle $D \equiv +3 \pmod 9$, also $\pi = \sqrt{3}$:

(7^a.) $\lg\varepsilon \equiv 0, \quad -\pi, \quad +\pi \pmod{\mathfrak{p}^2};$

im Falle $D \equiv -3 \pmod 9$, also $\pi = \sqrt{-3}$:

(7^b.) $\lg\varepsilon \equiv 0, \quad 0, \quad 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}.$

Im ersten Falle gehört also zu $\varepsilon_1 = 1 - \pi + \cdots$ $\lg\varepsilon = \pi$; hier ist also $\varepsilon_1 = e^\pi$. Hier bilden in dem Systeme (π, π^2, π^3) offenbar π und π^2 ein Fundamentalsystem für alle Logarithmen; ersetzt man noch $\varepsilon_1 = 1-\pi+\cdots$ und $\varepsilon_2 = e^{\pi^2} = 1 + \frac{3}{1} + \cdots$ durch die ihnen modulo $\mathfrak{p}^2$ bzw. $\mathfrak{p}^3$ kongruenten Einheiten $1 - \sqrt{3}$ und 4, wodurch die Ordnung ihres Regulators nicht geändert wird, so erhält man das erste Resultat:

Ist $D \equiv +3 \pmod 9$, so ist für den Bereich von 3 jede Zahl des Körpers $K(\sqrt{D})$ in der Form:

(8.) $\alpha = (\sqrt{3})^a(-1)^b e^c = (\sqrt{3})^a(-1)^b e^{c_1\pi + c_2\pi^2} = (\sqrt{3})^a(-1)^b(1-\sqrt{3})^{\bar{c}_1} 4^{\bar{c}_2}$

eindeutig darstellbar, wenn c_1, c_2 bzw. $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ beliebige ganze rationale triadische Zahlen bedeuten.

Im zweiten Falle $D \equiv -3 \pmod 9$ tritt in allen drei Klassen nach (7^b.) je eine Einheitswurzel auf; $K(\mathfrak{p})$ enthält also die primitive dritte Einheitswurzel, also mit $(-1)^b$ zusammen die sämtlichen sechsten Einheitswurzeln v^b, und es bilden (π^2, π^3) ein Fundamentalsystem für alle Logarithmen, die ja hier sämtlich zu Exponentialeinheiten gehören. Ersetzt man, was auch hier geschehen kann, die zu den Logarithmen $l_1 = \pi^2$, $l_2 = \pi^3$ gehörigen Einseinheiten durch die ihnen äquivalenten einfachsten

$-e^{\pi^2} \equiv -(1+\pi^2) \equiv +2 \pmod{\mathfrak{p}^3}$, $e^{\pi^3} \equiv 1 + \pi^3 = 1 - 3\sqrt{-3} \pmod{\mathfrak{p}^4}$,

so ergibt sich das zweite Resultat:

Ist $D \equiv -3 \pmod 9$, so ist für den Bereich von 3 jede Zahl des Körpers $K(\sqrt{D})$ in der Form:

(9.) $\alpha = (\sqrt{-3})^a \cdot v^b e^c = (\sqrt{-3})^a v^b e^{c_1\pi^2 + c_2\pi^3}$

oder auch in der Form:

(9^a.) $a = (\sqrt{-3})^a \cdot v^b 2^{\bar{c}_1}(1-3\sqrt{-3})^{\bar{c}_2}$

eindeutig darstellbar, wenn v eine primitive sechste Einheitswurzel bedeutet.

Es sei jetzt endlich $p=2$ ein Diskriminantenteiler, also $\pi \sim 2^{\frac{1}{2}}$. Dann ist für jede Zahl α im Bereiche $K(\mathfrak{p})$ des Primteilers von 2

$$\alpha = \pi^a \varepsilon = \pi^a(1 + \varepsilon_1\pi + \varepsilon_2\pi^2 + \cdots),$$

wo die ε_i gleich 0 oder 1 sein können. Hier ist $\varepsilon = 1 + \xi$ nur dann eine Exponentialeinheit, wenn ξ durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar ist, wo $\frac{r}{2} > \frac{1}{2-1}$, also $r=3$ ist; dazu muß also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ sein. Die Klassenzahl aller Einseinheiten ist mithin gleich 4, und da für $\varepsilon = 1 + \pi$

$$\varepsilon^2 = (1+\pi)^2 \equiv 1 + \pi^2 \pmod{\mathfrak{p}^3},$$

also ε^2 noch keine Exponentialeinheit ist, so folgt, daß erst ε^4 eine solche wird, daß also jede der vier Einseinheiten $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ in je einer von diesen Klassen vorkommt. Deshalb brauchen wir nur diese Potenzen und ihre Logarithmen $\lg \varepsilon^g = g \lg \varepsilon$ modulo $\mathfrak{p}^3$ zu untersuchen.

Läßt man nun in der Entwickelung von $\lg(1+\pi) = \pi - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \cdots$ alle durch $\mathfrak{p}^3$ teilbaren Glieder fort, so ergibt sich

$$\lg(1+\pi) \equiv \pi - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{4} - \frac{\pi^8}{8} \pmod{\mathfrak{p}^3}. \tag{10.}$$

Es sei nun zuerst $D = 2D_0$, also 2 ein Teiler von D. Dann kann man die ungerade Zahl $D_0 = Ek^2$ setzen, wo k^2 wieder eine in D_0 enthaltene dyadische Quadratzahl und $E \equiv D_0 \pmod 8$ ist, so daß

$$E = +1, \quad -1, \quad +3, \quad -3 \tag{11.}$$

sein kann. Dann darf man stets $\pi = \sqrt{2 \cdot E}$ setzen, und es ist in (10.)

$$\frac{\pi^2}{2} = E, \quad \frac{\pi^4}{4} = E^2 \equiv 1, \quad \frac{\pi^8}{8} = 2E^4 \equiv 2 \pmod{\mathfrak{p}^3};$$

diese Kongruenz geht daher über in:

$$\lg(1+\pi) \equiv \pi + (1-E) \pmod{\mathfrak{p}^3}. \tag{10^a.}$$

Ist also $E = 1, -3$, ist also $D_0 \equiv +1 \pmod 4$ so wird:

$$\lg(1+\pi) \equiv \pi \pmod{\mathfrak{p}^3},$$

ist dagegen $E = -1, +3$ oder $D_0 \equiv -1 \pmod 4$, so ergibt sich

$$\lg(1+\pi) \equiv \pi + \pi^2 \pmod{\mathfrak{p}^3};$$

in den beiden unterschiedenen Fällen $D_0 = 4n+1$, bzw. $D_0 = 4n-1$ wird also, da $\lg(1+\pi)^g = g \lg(1+\pi)$ ist:

$$\lg(1+\pi) \equiv \lg(1+\pi)^3 \equiv \pi \quad \text{bzw.} \quad \pi + \pi^2, \quad \lg(1+\pi)^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^3},$$

beide Male enthält also $K(\mathfrak{p})$ nur die zweite Einheitswurzel -1 und außerdem die beiden Einseinheiten

$$1+\pi+\varepsilon_3\pi^3+\cdots=e^{\pi} \quad \text{bzw.} \quad e^{\pi+\pi^2}$$

Stellt man π bzw. $(\pi+\pi^2)$ mit dem Fundamentalsystem (π^3, π^4) für die Logarithmen aller Exponentialeinheiten zusammen, so erhält man aus den beiden Systemen

$$(\pi, \pi^3, \pi^4) \quad \text{bzw.} \quad (\pi+\pi^2, \pi^3, \pi^4)$$

als Fundamentalsystem für alle Logarithmen in den beiden unterschiedenen Fällen:

$$(\pi, \pi^4) \quad \text{bzw.} \quad (\pi+\pi^2, \pi^4),$$

denen beide Male die Numeri

$$\varepsilon_1=1+\pi+\cdots, \quad \varepsilon_2=1+\pi^4+\cdots\equiv 1+4E^2\equiv 5 \pmod 8$$

oder auch die Numeri $(1+\pi)$ und 5 entsprechen, deren Logarithmen ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. Es gilt also der folgende einfache Satz:

Ist $D=2D_0$ durch 2 teilbar, so besteht für die Darstellung aller Zahlen α im Bereiche $K(\mathfrak{p})$ des zu 2 gehörigen Primteilers die Gleichung:

(12.) $$\alpha=\pi^a(-1)^b e^c=\pi^a(-1)^b(1+\pi)^{c_1}5^{c_2},$$

oder es gelten die beiden Gleichungen:

(12ª.) $$\alpha=\pi^a(-1)^b e^{\bar{c}_1\pi+\bar{c}_2\pi^4} \quad \text{oder} \quad \alpha=\pi^a(-1)^b e^{\bar{c}_1(\pi+\pi^2)+\bar{c}_2\pi^4}$$

je nachdem D_0 von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ ist.

Es sei endlich 2 Diskriminantenteiler, aber nicht in D enthalten. Dann muß bekanntlich $D=8n-1$ oder $8n+3$, d. h.

$$D=(-1)k^2 \quad \text{oder} \quad D=3k^2 \quad (2)$$

sein, wo k^2 wieder eine dyadische Quadratzahl bedeutet, und somit kann in diesen beiden Fällen als Primteiler:

$$\pi=1-i \quad \text{bzw.} \quad \pi=1-\sqrt{3}$$

gewählt werden. Hiernach ist also

$$\pi=1-i, \quad \frac{\pi^2}{2}=-i, \quad \frac{\pi^4}{4}=-1, \quad \frac{\pi^8}{8}=+2,$$

bzw.

$$\pi=1-\sqrt{3}, \quad \frac{\pi^2}{2}=2-\sqrt{3}, \quad \frac{\pi^4}{4}\equiv -1, \quad \frac{\pi^8}{8}\equiv +2 \pmod{\mathfrak{p}^3},$$

und aus (10.) ergeben sich somit für $\lg(1+\pi)$ die folgenden Werte

$$\lg(1+\pi)\equiv 0, \quad \text{bzw.} \quad \lg(1+\pi)\equiv\pi^2 \pmod{\mathfrak{p}^3}.$$

Im ersten Falle sind also die Logarithmen aller vier Potenzen $(1+\pi)^k$

für $k = 0, 1, 2, 3$ modulo $\mathfrak{p}^3$ kongruent Null. Hier enthält daher $K(\mathfrak{p})$ eine primitive vierte Einheitswurzel, und zwar offenbar $i = 1 - \pi$, und sonst nur Exponentialeinheiten; im zweiten Falle sind jene vier Logarithmen bzw. kongruent 0, 2, 0, 2; $K(\mathfrak{p})$ enthält also nur die zweite Einheitswurzel -1 und sonst außer den Exponentialeinheiten noch eine Einseinheit $\varepsilon_1 = 1 + \pi + \varepsilon_3 \pi^3 + \cdots$, deren Logarithmus gleich π^2 ist. Genau wie vorher erkennt man, daß im ersten Falle die Zahlen (π^3, π^4), im zweiten (π^2, π^3) ein Fundamentalsystem für alle Logarithmen bilden.

Im ersten Falle kann man als Numeri für das Fundamentalsystem der Logarithmen die Einseinheiten:

$$\varepsilon_1 = -(1 + \pi^3) = 1 - 2i \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = -(1 + \pi^4) = 3$$

wählen, da ihre Logarithmen auch ein Fundamentalsystem bilden. Im zweiten Falle kann man ähnlich entweder die Einheiten:

$$\varepsilon_1 = 1 + \pi = 2 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{1+\pi}{1-\pi}$$

wählen, da $\lg \varepsilon_1$ die Ordnungszahl 2 besitzt, und

$$\lg \bar{\varepsilon}_2 = \lg \frac{1+\pi}{1-\pi} = 2\left(\frac{\pi}{1} + \frac{\pi^3}{3} + \cdots\right)$$

offenbar von dritter Ordnung ist. Oder aber, man kann statt $\bar{\varepsilon}_2$ auch die Einseinheit

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \bar{\varepsilon}_2^{-1} = 1 - \pi = \sqrt{3}$$

wählen. Es gilt also hier der folgende Satz:

Ist $D = 8n - 1$ oder $8n + 3$, so ist für den Bereich des Primteilers von 2 stets:

$$\alpha = \pi^a i^b e^c = \pi^a i^b e^{c_1 \pi^3 + c_2 \pi^4} = \pi^a i^b (1 - 2i)^{\bar{c}_1} \cdot 3^{\bar{c}_2}$$

bzw.

$$\alpha = \pi^a (-1)^b e^c = \pi^a (-1)^b e^{c_1 \pi^2 + c_2 \pi^3} = \pi^a (-1)^b (2 + \sqrt{3})^{\bar{c}_1} \cdot (\sqrt{3})^{\bar{c}_2}.$$

The Equation $x^l - A = 0 \quad (p)$.

By Mr. *G. E. Wahlin* of Urbana (Ill.).

Introduction.

We shall suppose that we have an arbitrary algebraic domain of rationality $k(\alpha)$ determined by the number α. Let p be any prime divisor of this domain. The domain of all p-adic numbers of $k(\alpha)$ we shall denote in the usual manner by $k(p, \alpha)$. By l we shall understand a rational prime and by A any number of $k(p, \alpha)$.

The object of the work in the following pages is to study the equation

$$x^l - A = 0 \quad (p); \tag{1.}$$

to determine how the function $x^l - A$ is decomposed into the product of irreducible factors in $k(p, \alpha)$; and to determine how the domain $k(p, \alpha)$ must be enlarged, in order that the given equation shall, in the new domain, have l solutions.

The first sections contain some general properties of relative p-adic domains. I have made free use of the results found in Professor *Hensel*'s book „Theorie der algebraischen Zahlen". In some instances these results have been applied to relative domains while in reality they have only been demonstrated for domains considered relative to the domain of rational numbers but, where such is the case, it will be found that the proof given by Professor *Hensel* is perfectly general in its nature and can be immediately extended to relative domains and hence a repetition of the proof is superfluous.

Throughout the entire paper I shall use the following notation. By p^σ I shall understand the highest power of p contained in the rational prime l, by π an integer of $k(p, \mathfrak{a})$, which is equivalent to p and by $\varkappa$ the integer $\left[\frac{\sigma}{l-1}\right]$.

§ 1. Power-residues in $k(p, \mathfrak{a})$.

We shall next prove some theorems in regard to the relation between the binomial congruence modulo a power of p and the binomial equation for the domain of p, the degree of the binomial in each case being l.

Theorem I. If E is any unit in $k(p, \mathfrak{a})$, then the equation

$$x^l - E = 0 \quad (p)$$

has a solution in the given domain when and only when the congruence

$$x^l - E \equiv 0 \mod p^{\sigma+\varkappa+1}$$

has a solution in this domain.

That the given condition is necessary follows directly from the definition of equality and it is therefore only necessary to show that it is also sufficient.

To show this we need only apply the more general theorm found on pages 72—74 of Professor *Hensel*'s Theorie der algebraischen Zahlen. (The proof of this theorem as given can be immediately extended to algebraic domains.) Using Professor *Hensel*'s notation we have for $\sigma > 0$, $\varrho^{(i)} = \sigma$ for $i < l$ and $\varrho^{(l)} = 0$. It therefore follows that for $i < l$

$$\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1} = \sigma,$$

and for $i = l$

$$\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1} = \frac{l\sigma}{l-1} = \sigma + \frac{\sigma}{l-1}.$$

For $\sigma = 0$ we have $\varrho' = 0$ and $\varrho^{(l)} = 0$ and hence

$$\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1} \leqq 0 = \sigma + \frac{\sigma}{l-1}.$$

Hence in either case

$$\text{Max.}\left(\frac{i\varrho' - \varrho^{(i)}}{i-1}\right) = \sigma + \frac{\sigma}{l-1},$$

and since $\sigma + \varkappa + 1$ is the smallest integer greater than $\sigma + \frac{\sigma}{l-1}$ we see that the truth of the theorem is established.

Theorem II. When the equation

$$x^l - E = 0 \quad (p)$$

has a solution in $k(p, \mathfrak{a})$ then there exists in this domain a B_0 such that the number $B_0^l - E$ is of order $\sigma + \varkappa + 1$ precisely.

This is easily seen as follows. Suppose that B is a solution of the given equation and let B' be any unit of $k(p, \mathfrak{a})$. Then $B_0 = B + \pi^{\varkappa+1} B'$ is a number which satisfies the given condition.

To show this we need only consider

$$B_0^l = B^l + l\pi^{\varkappa+1} B' + l\pi^{2\varkappa+2}(\cdots) + \pi^{l(\varkappa+1)} B'^l \quad (p).$$

In the right hand member of this equation the last term is divisible by $p^{l(\varkappa+1)}$ and since $\varkappa + 1 > \frac{\sigma}{l-1}$, $l(\varkappa + 1) > \sigma + \varkappa + 1$. Moreover the terms between the second and the last are divisible by $p^{\sigma+2\varkappa+2}$. Therefore since the second term is divisible only by $p^{\sigma+\varkappa+1}$ it follows that $B_0^l - B^l$ is of order $\sigma + \varkappa + 1$. But

$$B^l = E \quad (p)$$

and hence $B_0^l - E$ is of order $\sigma + \varkappa + 1$.

Theorem III. If the equation

$$x^l - E = 0 \quad (p)$$

does not have a solution in $k(p, \mathfrak{a})$, and if t is the largest exponent such that the congruence

$$x^l - E \equiv 0 \mod p^t$$

has a solution in $k(p, \mathfrak{a})$, then t is a multiple of l when and only when

$$t = \varkappa l = \sigma + \varkappa.$$

We shall suppose in this case that $\sigma > 0$ because if $\sigma = 0$ then $\varkappa = 0$ and $t < \sigma + \varkappa + 1$ says that $t = 0 \cdot l = \sigma + \varkappa$ and no further proof is needed.

Let us suppose that f is the degree of p. Then since l is the rational prime which is divisible by p, σ being greater than zero, we have

$$N(p) = l^f.$$

Therefore, since E is a unit and hence satisfies the congruence

$$(E^{l^f-1})^l \equiv E \mod p,$$

we see that t is always positive.

Let B_0 be an integer of $k(p, \mathfrak{a})$ such that

$$B_0^l - E \equiv 0 \mod p^t.$$

Then

$$\frac{B_0^l - E}{\pi^t}$$

is a unit in $k(p, \mathfrak{a})$ and therefore, if we put

$$B = \left(\frac{B_0^l - E}{\pi^t}\right)^{l^{l-1}} \quad (p),$$

we have

$$B^l \equiv \frac{B_0^l - E}{\pi^t} \mod. p.$$

Let us now, according to our assumption, put $t = \varkappa' l$. From the last congruence we then have

(2.) $$E \equiv B_0^l - (\pi^{\varkappa'} B)^l \mod. p^{t+1}.$$

But, as is easily seen since l is divisible by p^σ,

(3.) $$B_0^l - (\pi^{\varkappa'} B)^l \equiv (B_0 - \pi^{\varkappa'} B)^l \mod. p^{\sigma+\varkappa'}.$$

The exponent t cannot be greater than $\sigma + \varkappa$ because if it were the equation

$$x^l - E = 0 \quad (p)$$

would have a solution in $k(p, \mathfrak{a})$, which is contrary to our assumption.

Moreover t cannot be less than $\sigma + \varkappa'$ because if it were, then

$$t + 1 \leqq \sigma + \varkappa'$$

and from the congruences (2.) and (3.) it would then follow that

$$E \equiv (B_0 - \pi^{\varkappa'} B)^l \mod. p^{t+1},$$

which contradicts the fact that such a congruence cannot be satisfied in $k(p, \mathfrak{a})$ when the modulus is a higher power of p than p^t. We therefore have

$$\sigma + \varkappa' \leqq t \leqq \sigma + \varkappa.$$

Since $t \leqq \sigma + \varkappa \leqq \sigma + \frac{\sigma}{l-1} = \frac{l\sigma}{l-1}$ we have $\frac{t}{l} \leqq \frac{\sigma}{l-1}$ and hence $\varkappa' \leqq \varkappa$.

If we assume that $\varkappa' < \varkappa$, then

$$\varkappa' < \frac{\sigma}{l-1}$$

and consequently

$$t = l\varkappa' < \sigma + \varkappa'$$

which we have already seen to be impossible, and $\varkappa'$ can therefore not be less than $\varkappa$. It follows therefore that

$$\varkappa' = \varkappa$$

and since $t = \varkappa' l$ and $\sigma + \varkappa' \leqq t \leqq \sigma + \varkappa$ we have

$$t = \varkappa l = \sigma + \varkappa.$$

§ 2. Relative Domains of Rationality.

If we have in $k(p, \mathfrak{a})$ an irreducible function $f(x)$ of degree n, then the root $\mathfrak{A}$ of the equation

$$f(x) = 0 \quad (p)$$

is an algebraic number of degree n relative to $k(p, \mathfrak{a})$. By the adjunction of $\mathfrak{A}$ to $k(p, \mathfrak{a})$ we have a new domain $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ of degree n relative to the old domain. In the usual manner we can then form the relative conjugates of any number of $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$. The relative norm of a number $\mathfrak{b}$ taken in a domain k_2 relative to a domain k_1 is the product of $\mathfrak{b}$ and its relative conjugates and shall be denoted by

$$N_{k_1}^{k_2}(\mathfrak{b})$$

or when there is no danger of confusion simply by

$$N_k(\mathfrak{b}),$$

it being understood that $N(\mathfrak{b})$ means the norm taken in the ordinary sense, i. e. relative to the domain of rational numbers.

If $\mathfrak{b}$ belongs to k_1 and k_2 is of degree n relative to k_1, then evedently

$$N_{k_1}^{k_2}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^n.$$

Hence if we take the prime number π of $k(p, \mathfrak{a})$ then

$$N_k(\pi) = \pi^n.$$

There are therefore, in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, integers whose norms are of order n. If there are numbers whose relative norms are of positive order less than n let us suppose that π_1 is a number such that $N_k(\pi_1)$ is of minimum positive order. If no number whose norm is of positive order is such that this order is less than n put $\pi_1 = \pi$. Then

$$N_{k_1}^{k_2}(\pi_1) \backsim \pi^\varphi$$

where $\varphi \leqq n$. Also, if we put $k_2 = k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, $k_1 = k(p, \mathfrak{a})$,

$$N^{k_2}(\pi_1) = N^{k_1}(N_{k_1}^{k_2}(\pi_1)) \backsim N_k(\pi^\varphi) \backsim P^{\varphi \cdot f}$$

where P is a rational prime.

The method used by Professor *Hensel**) will then suffice to show that π_1 has the property of a prime, and hence every number in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ is either a unit or of the form $\pi_1^a E$ where E is a unit. Therefore

$$\pi = \pi_1^e \cdot E(p)$$

and hence

---

*) Theorie der algebraischen Zahlen, Kap. 6 und 7.

$$\pi^n = N_k(\pi) \backsim N_k(\pi_1^e) \backsim \pi^{e\varphi}.$$

Therefore

$$N = e\varphi$$

and hence φ must be a divisor of n.

If we denote by p_1 the prime divisor of p in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ which is equivalent to π_1 we have

$$N(p_1) = P^{f\varphi}$$

and hence the degree of p_1 is $f \cdot \varphi$. In the same way we can write

$$N_k(p_1) = p^{\varphi}$$

and shall therefore call φ the relative degree of the prime divisor p_1.

If we now employ the methods used by Professor *Hensel* in Chapters 7 and 8 we see that if $f(x)$ is irreducible in the ordinary sense, and in $k(p, \mathfrak{a})$, to which domain $f(x)$ belongs,

$$f(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdots g_r(x) \quad (p)$$

and if

$$f(x) = 0$$

has the root $\mathfrak{A}$, then to each factor $g_i(x)$ there corresponds a prime divisor p_i of p in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$. If e_i is the power to which this prime divisor enters p and φ_i its relative degree then $e_i \cdot \varphi_i$ is the degree of $g_i(x)$.

These factors $g_i(x)$ are such that the number $\mathfrak{A}$ is a root of the equation

$$g_i(x) = 0 \quad (p_i)^*).$$

If we have a function $f(x)$ in $k(p, \mathfrak{a})$ and if $\mathfrak{a}_1$ is an irrationality such that in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$ the divisor p is the product of powers of r different prime divisors $p_1, p_2, \ldots p_r$ and if in $k(p_i, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$

$$f(x) = \varphi_{1i}(x) \cdot \varphi_{2i}(x) \cdots \varphi_{si}(x) \quad (p_i)$$

where $\varphi_{ji}(x)$ is of degree n_j independent of i then in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_s(x) \quad (p)$$

where the degree of $\varphi_j(x)$ is the same as the degree of $\varphi_{ji}(x)$.

To see this we need only show that if p^n is an arbitrarily high power of p the congruence

$$f(x) \equiv \varphi_1^{(n)}(x) \cdot \varphi_2^{(n)}(x) \cdots \varphi_s^{(n)}(x) \mod p^n$$

holds in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$.

To show this we need only choose an n' so large that the product

---

*) Theorie der algebraischen Zahlen S. 181.

$$p_1^{n'} \cdot p_2^{n'} \cdots p_r^{n'}$$

is divisible by p^n. Since

$$f(x) = \varphi_{1i}(x) \cdot \varphi_{2i}(x) \cdots \varphi_{si}(x) \quad (p_i)$$

we know that there exist functions such that

$$f(x) \equiv \varphi_{1i}^{(n')}(x) \cdot \varphi_{2i}^{(n')}(x) \cdots \varphi_{si}^{(n')}(x) \mod p_i^{n'}$$

and if we choose r integers $c_1, c_2, \ldots c_r$ in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$ such that

$$c_i \equiv 1 \mod p_i^{n'}, \quad c_i \equiv 0 \mod p_j^{n'} \quad (j \neq i)$$

then

$$\varphi_j^{(n)}(x) = \sum_i c_i \varphi_{ji}(x) \equiv \varphi_{j\lambda}(x) \mod p_\lambda^{n'}$$

is a function of the same degree as $\varphi_{j\lambda}(x)$.

Moreover it is easily seen that

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi_{1\lambda}(x) \cdot \varphi_{2\lambda}(x) \cdots \varphi_{s\lambda}(x) \\ &\equiv \varphi_1^{(n)}(x) \cdot \varphi_2^{(n)}(x) \cdots \varphi_s^{(n)}(x) \mod p_\lambda^{n'} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r) \end{aligned}$$

and therefore also modulo $p_1^{n'} \cdot p_2^{n'} \cdots p_r^{n'}$.

Hence

$$f(x) \equiv \varphi_1^{(n)}(x) \cdot \varphi_2^{(n)}(x) \cdots \varphi_s^{(n)}(x) \mod p^n,$$

and the functions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_s(x)$ therefore exist in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$ such that

$$f(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_s(x) \quad (p).$$

§ 3. The Roots of Unity in $k(p, \mathfrak{a})$.

If we suppose that the prime divisor p is not a divisor of l and let P be the rational prime which is divisible by p, and again let f be the degree of p, so that

$$N(p) = P^f,$$

then we know that the domain $k(p, \mathfrak{a})$ contains the $P^f - 1$ roots of the equation

$$x^{P^f - 1} - 1 = 0 \quad (p).$$

If q is any other rational prime, and we suppose first that q is a factor of $P^f - 1$, then it is evident that the qth roots of unity are also contained in $k(p, \mathfrak{a})$. If however we suppose that q is different from P, and is relatively prime to $P^f - 1$, then no q^{th} root of unity can be contained in $k(p, \mathfrak{a})$.

This is easily seen as follows. Suppose that ϱ is a qth root of unity contained in $k(p, \mathfrak{a})$. Then since ϱ is a unit

$$\varrho^{P^f - 1} \equiv 1 \mod p,$$

and since $P^l - 1$ is relative prime to q if ϱ is a primitive q^{th} root of unity the same is true of $\varrho' = \varrho^{P^l-1}$, and this is moreover a principal unit. We can therefore write

$$\varrho' = 1 + a_s \pi^s + \cdots = 1 + \pi^s A \quad (p).$$

Since ϱ' is a primitive q^{th} root of unity and therefore different from 1, s is finite. But then

$$\varrho'^q = 1 + q\pi^s A + \pi^{2s} A' \quad (p)$$

and hence $\varrho'^q - 1$ is of order s. But then

$$\varrho'^q - 1 \neq 0 \quad (p)$$

since s is finite and hence this contradicts the fact that ϱ' is a qth root of unity. The assumption that $k(p, \mathfrak{a})$ contains q^{th} roots of unity different from 1 therefore leads to a contradiction and hence no such numbers can exist in $k(p, \mathfrak{a})$.

The domain $k(p, \mathfrak{a})$ may however contain the primitive P^{th} roots of unity.

Let us suppose that such is the case and that ϱ is a primitive P^{th} root of unity. The number ϱ is then a root of the equation

$$x^{P-1} + x^{P-2} + \cdots + x + 1 = 0 \quad (p)$$

and, in $k(p, \mathfrak{a})$.

$$x^{P-1} + x^{P-2} + \cdots + x + 1 = (x - \varrho)(x - \varrho^2) \cdots (x - \varrho^{P-1}) \quad (p).$$

If in this equation we now put $x = 1$ we have

$$P = (1 - \varrho)(1 - \varrho^2) \cdots (1 - \varrho^{P-1}) \quad (p)$$

or

$$(4.) \qquad P = (1 - \varrho)^{P-1}(1 + \varrho)(1 + \varrho + \varrho^2) \cdots (1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{P-2}) \quad (p).$$

But

$$\varrho^P = 1 \quad (p)$$

and since ϱ is a unit in $k(p, \mathfrak{a})$

$$\varrho^{P^l-1} \equiv 1 \mod p,$$

and hence it is easily seen that

$$\varrho \equiv 1 \mod p$$

and from (4.) we have then

$$(5.) \qquad \frac{P}{(1-\varrho)^{P-1}} \equiv 2 \cdot 3 \cdots (P-1) \mod p.$$

But by *Wilson*'s theorem

$$2 \cdot 3 \cdots (P-1) \equiv -1 \mod P$$

and hence also modulo p and from (5.) we then have

$$\frac{P}{(1-\varrho)^{P-1}} \equiv -1 \mod p.$$

Therefore

$$\frac{-P}{(1-\varrho)^{P-1}} = E \quad (p) \tag{6.}$$

where E is a principal unit.

If we now consider the equation

$$x^{P-1} - E = 0 \quad (p)$$

we see, when we apply the theorem used in the proof of theorem I, that this equation has a solution when the congruence

$$x^{P-1} \equiv E \mod p$$

has a solution. But since E is a principal unit 1 is a solution of this congruence, and we therefore know that there exists in $k(p, \mathfrak{a})$ a principal unit E_1 such that

$$E_1^{P-1} = E \quad (p).$$

Therefore (6.) can be written in the form

$$\frac{-P}{(1-\varrho)^{P-1}} = E_1^{P-1} \quad (p)$$

and from this we have

$$[(1-\varrho)E_1]^{P-1} = -P \quad (p). \tag{7.}$$

We therefore conclude that when $k(p, \mathfrak{a})$ contains a primitive P^{th} root of unity then it also contains a root of the equation

$$x^{P-1} + P = 0 \quad (p). \tag{8.}$$

Moreover, since $k(p, \mathfrak{a})$ contains the $(P^l - 1)^{\text{th}}$ roots of unity and hence also the $(P-1)^{\text{th}}$ roots of unity, we know that when the equation (8.) has one solution in $k(p, \mathfrak{a})$ then it has $P-1$ solutions in this domain.

We shall next show the converse of the above demonstrated fact, namely, when $k(p, \mathfrak{a})$ contains a root of the equation (8.) then it also contains a primitive P^{th} root of unity.

The equation

$$x^P - 1 = 0 \quad (p) \tag{9.}$$

has atleast one solution in $k(p, \mathfrak{a})$, namely $x = 1$. From theorem II we then know that there exists in $k(p, \mathfrak{a})$ a B_0 such that $B_0^P - 1$ is of order $\sigma + \varkappa + 1$, where σ is the order of P.

Let η be any solution of (8.). Since P is divisible by p the

same is true of η and if p^s is the highest power of p contained in η, $p^{s(P-1)}$ is the highest power of p contained in $\eta^{P-1} = -P$. Hence $\sigma = s(P-1)$ or $s = \dfrac{\sigma}{P-1} = \varkappa$.

If we let ϱ be any solution of (9.) and if we put

$$\xi = \varrho - B_0 \quad (p)$$

then ξ is a root of the equation

$$(10.) \qquad (x + B_0)^P - 1 = 0 \quad (p)$$

or in the expanded form

$$(11.) \qquad x^P + PB_0x^{P-1} + \cdots + PB_0^{P-1}x + B_0^P - 1 = 0 \quad (p).$$

The number $\xi' = \xi/\eta$ is a solution of the equation

$$x^P + \frac{P}{\eta} B_0x^{P-1} + \cdots + \frac{P}{\eta^{P-1}} B_0^{P-1}x + \frac{B_0^P - 1}{\eta^P} = 0 \quad (p)$$

or since $\eta^{P-1} = -P \quad (p)$

$$(12.) \qquad x^P + \frac{P}{\eta} B_0x^{P-1} + \cdots - B_0^{P-1}x + \frac{B_0^P - 1}{\eta^P} = 0 \quad (p).$$

Since P is of higher order than η^{P-2} the coefficients of x in the last equation are all integers and all of them, with the exception of the coefficient of the Pth and first power are divisible by p. The order of $B_0^P - 1$ is $\sigma + \varkappa + 1 = \dfrac{P\sigma}{P-1} + 1 = P\varkappa + 1$ since $\varkappa = \dfrac{\sigma}{P-1}$ and therefore the last term in (12.) is also an integer and is divisible by p, because $P\varkappa$ is the order of η^P.

If we now denote by $F(x)$ the left hand member of (12.) we have

$$(13.) \qquad F'(\xi') = P\xi'^{P-1} + (P-1)\frac{P}{\eta} B_0\xi'^{P-2} + \cdots - B_0^{P-1} \quad (p)$$

which is easily seen to be relatively prime to p since B_0 is relatively prime to p.

We then know*) that (12.) has as many distinct solutions in $k(p, \mathfrak{a})$ as the congruence

$$(14.) \qquad F(x) \equiv 0 \mod p$$

has distinct solutions in this domain.

But

$$F(x) \equiv x^P - B_0^{P-1}x \mod p$$

and hence $0, B_0, 2B_0, 3B_0, \ldots (P-1)B_0$ are all solutions of the congruence (14.)

*) Theorie der algebraischen Zahlen, p. 71 (See also chapter 7, § 1.).

and it is evident that they are all distinct. The equation (12.) has therefore P solutions in $k(p, \mathfrak{a})$, and since $\xi = \eta \cdot \xi'$, the equation (11.) also has P solutions in the same domain. We shall denote these solutions by $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_P$. It then follows that $\varrho_i = \xi_i + B_0$ are all distinct and by virtue of (10.), they are all roots of the equation

$$x^P - 1 = 0 \quad (p)$$

and hence $k(p, \mathfrak{a})$ contains the primitive P^{th} roots of unity.

We shall next see what the effect upon $k(p, \mathfrak{a})$ is when we enlarge it by the adjunction of a root of unity.

We shall first consider the adjunction of a primitive n^{th} root of unity where n is relatively prime to p and to $P^l - 1$. Let ϱ be such a root of unity and suppose that in $k(\mathfrak{a}, \varrho)$ $p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$. From the first part of this section we know that a domain considered with respect to a given prime divisor can contain such a root of unity only when it is contained in the coefficient domain for the particular prime divisor p_i which we are considering. If we therefore let φ_i be the relative degree of p_i n must be a divisor of $P^{\varphi_i l} - 1$.

Moreover when we denote by φ the smallest rational integer such that $P^{\varphi l} - 1 \equiv 0$ mod. n and adjoin to $k(p, \mathfrak{a})$ a primitive $(P^{\varphi l} - 1)^{\text{th}}$ root of unity we see that we thereby also introduce into the domain the number ϱ_n and we therefore can conclude that

$$\varphi_i = \varphi$$

i. e. all the divisors $p_1, p_2, \ldots p_r$ are of the same relative degree.

The $(P^{\varphi l} - 1)^{\text{th}}$ root of unity introduced was however a root of the equation

$$x^{P^{\varphi l} - 1} - 1 = 0 \quad (p_i). \tag{14.}$$

But since we wished to introduce a root ϱ of the equation

$$x^n - 1 = 0 \quad (p)$$

that says that the equation

$$x^n - 1 = 0 \quad (p_i)$$

will be satisfied for all values $i = 1, 2, \ldots r$ and hence also the equation (14.) will have solutions for the domains of all the prime divisors p_i, and $x^{P^{\varphi l} - 1} - 1$ will have a linear factor for the domains of all p_i. Hence by a previous theorem we know that it will also have a linear factor for the domain of p, and hence the equation

(15.) $$x^{P^{\varphi f}-1} - 1 = 0 \quad (p)$$

will also have a solution in $k(p, \mathfrak{a}, \varrho_n)$.

We therefore conclude that the adjunction to $k(p, \mathfrak{a})$ of a root of the equation

$$x^n - 1 = 0 \quad (p)$$

is equivalent to the adjunction of a root of the equation (15.).

Let us denote by $\psi(x)$ the left hand member of the equation (15.) and by w a primitive $(P^{f\varphi} - 1)^{\text{th}}$ root of unity. Then since

$$\psi'(w) = (P^{\varphi f} - 1) w^{P^{\varphi f}-2}$$

is relatively prime to p, if $\mathfrak{p}_i'$ is any prime divisor of p in $k(\mathfrak{a}, w)$, the roots of (15.) are all incongruent modulo $\mathfrak{p}_i'$. We shall suppose that

$$g(x) = 0 \quad (\mathfrak{p}_i')$$

is the irreducible equation in $k(p, \mathfrak{a})$ of which w is a root. Since $D(\psi(x))$ is relatively prime to p the same is true of $D(g(x))$. Therefore since $g(x)$ is irreducible in $k(p, \mathfrak{a})$ it is also irreducible modulo p and therefore also modulo $\mathfrak{p}_i'$, in this domain*).

Moreover since $g(x)$ is a function in $k(p, \mathfrak{a})$

$$[g(x)]^{P^f} \equiv g(x^{P^f}) \mod \mathfrak{p}_i'$$

and the numbers $w, w^{P^f}, w^{P^{2f}}, \ldots w^{P^{(\varphi-1)f}}$ are all distinct roots of the congruence

(16.) $$g(x) \equiv 0 \mod \mathfrak{p}_i'.$$

But these powers of w are all $(P^{\varphi f} - 1)^{\text{th}}$ roots of unity and are therefore roots of the equation

(15′.) $$x^{P^{\varphi f}-1} - 1 = 0 \quad (\mathfrak{p}_i')$$

and since $g(x)$ is a factor of $x^{P^{\varphi f}-1} - 1$, all the roots of

(17.) $$g(x) = 0 \quad (\mathfrak{p}_i')$$

must be roots of (15′.). Buth the $(P^{\varphi f} - 1)^{\text{th}}$ roots of unity are, as we have already seen, all incongruent modulo $\mathfrak{p}_i'$ and hence since the roots $w, w^{P^f}, \ldots w^{P^{(\varphi-1)f}}$ of (15′.) are solutions of the congruence (16.) they must be roots of the equation (17.). Consequently $g(x) = 0 \ (\mathfrak{p}_i')$ has atleast φ solutions and must there fore be of a degree not less than φ.

If we let $S(w)$ be any symmetric function of $w, w^{P^f}, \ldots w^{P^{(\varphi-1)f}}$ we have

*) Theorie der algebraischen Zahlen. S. 68.

$$[S(w)]^{P^f} \equiv S(w^{P^f}) \mod p_i'$$

and since

$$w^{P^{\varphi f}} = w,$$
$$S(w^{P^f}) = S(w)$$

and therefore

$$[S(w)]^{P^f} \equiv S(w) \mod p_i'.$$

Hence $S(w)$ is modulo p_i' congruent to a number in $k(\mathfrak{a})$. It then follows that

$$G(x) = (x - w)(x - w^{P^f}) \cdots (x - w^{P^{(\varphi-1)f}})$$

is modulo p_i congruent to a function in $k(\mathfrak{a})$. The number w is therefore in $k(\mathfrak{a})$ the root of a congruence of degree φ modulo p_i'. Therefore, since $g(x)$ is irreducible modulo p_i' and w is a root of the congruence

$$g(x) \equiv 0 \mod p_i'$$

we know that, modulo p_i', $g(x)$ must be a divisor of $G(x)$ and therefore the degree of $g(x)$ cannot be greater than φ. Hence $g(x)$ must be of degree φ.

In the same manner we can now show that if ϱ is a primitive n^{th} root of unity, where n is relatively prime to P and if p_i is any prime divisor of p in $k(\mathfrak{a}, \varrho)$ then ϱ is in $k(p, \mathfrak{a})$ the root of an equation

$$g_1(x) = 0 \quad (p_i)$$

where $g_1(x)$ is also of degree φ and φ is the smallest integer such that $P^{\varphi f} - 1$ is divisible by n.

If we now denote by π_i a prime number of $k(p, \mathfrak{a}, \varrho)$ which is equivalent therefore to the prime divisor p_i and as before by π a prime number in $k(p, \mathfrak{a})$ then

$$\pi \backsim \pi_1^e$$

and in the same way as before

$$\varphi e = \text{degree of } g_1.$$

But we have already seen that the degree of g_1 is φ and hence we know that $e = 1$.

Consequently the prime number π of $k(p, \mathfrak{a})$ retains its character of a prime in the domain $k(p_i, \mathfrak{a}, \varrho)$.

We shall next see that the adjunction of a primitive P^{th} root of unity to $k(p, \mathfrak{a})$ is equivalent to the adjunction of a root of the equation

$$x^{P-1} + P = 0 \quad (p).$$

We shall therefore denote by ϱ_1 such a root of unity and by p_i any prime divisor of p in the domain $k(\mathfrak{a}, \varrho_1)$. In this domain the equation

$$x^P - 1 = 0 \quad (p_i)$$

has a solution for all values of i and hence the equation

$$x^{P-1} + P = 0 \quad (p_i)$$

has a solution for all values of i. By a previous theorem we then know that the equation

$$x^{P-1} + P = 0 \quad (p)$$

also has a solution in the new domain.

Conversely if we suppose that η is a solution of the equation

$$x^{P-1} + P = 0 \quad (p)$$

and p_i' is a prime divisor of p in $k(\mathfrak{a}, \eta)$ then, in the same way, we know that the equation

$$x^P - 1 = 0 \quad (p_i')$$

has a solution in $k(p, \mathfrak{a}, \eta)$ for all values of i and hence also the equation

$$x^P - 1 = 0 \quad (p)$$

has a solution, which proves the equivalence of the two adjunctions to a p-adic domain.

§ 4. The Equation $x^l - A = 0 \quad (p)$.

We are now ready to pass on to the discussion of the equation (1.) considered for the domain of an arbitrary prime divisor p. As before we shall suppose that the degree of p is f.

We know that every number A of $k(p, \mathfrak{a})$ can be written in the form

$$A = \pi^\alpha w^\beta E \quad (p) \tag{17.}$$

where π is a prime of the domain, w is a $(P^f - 1)^{\text{th}}$ root of unity, and E is a principal unit. The numbers α and β are rational integers and are called the order and index respectively of A. Evedently $0 \leqq \beta < P^f - 1$ and p may or may not be a divisor of l.

We can also write $\alpha = l \cdot \lambda + \alpha_1$ where $0 \leqq \alpha_1 < l$ and hence

$$A = (\pi^\lambda)^l \cdot \pi^{\alpha_1} w^\beta E \quad (p)$$

and the equation which we are considering can be written in the form

$$x^l - (\pi^\lambda)^l \pi^{\alpha_1} w^\beta E = 0 \quad (p).$$

This equation, as regards nature of solution and reducibility, is equivalent to the equation

$$x^l - \pi^{\alpha_1} w^\beta E = 0 \quad (p)$$

and we can therefore without loss of generality assume that in the given equation $0 \leqq \alpha < l$.

If we now suppose that $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$ is a domain, containing $k(p, \mathfrak{a})$ as a subdomain, in which the equation (1.) has l solutions, and denote by π_1 a prime of the larger domain and w_1 the highest $(P^{f_1}-1)^{\text{th}}$ root of unity contained in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1)$, we can write

$$\pi = \pi_1^e w_1^s E' \quad (p), \quad w = w_1^{r\frac{P^{f_1}-1}{P^f-1}}.$$

The equation which we are considering can now be written in the form

$$x^l - \pi_1^{e\alpha} w_1^{s\alpha+\beta r\frac{P^{f_1}-1}{P^f-1}} E'^{\alpha} E = 0 \quad (p).$$

If $\mathfrak{A}$ is any solution of this equation and

$$\mathfrak{A} = \pi_1^{\xi} w^{\eta} X \quad (p_1)$$

where p_1 is the prime divisor corresponding to π_1 we have when substitute this value for $\mathfrak{A}$

$$\pi_1^{l\xi} w_1^{l\eta} \cdot X^l = \pi_1^{e\alpha} w_1^{s\alpha+\beta r\frac{P^{f_1}-1}{P^f-1}} \cdot E'^{\alpha} E \quad (p_1).$$

Hence to determine the unknown rational integers ξ and η and the principal unit X we have the system of relations

$$(18.) \quad \begin{cases} \text{(a.)} & l\xi = \alpha e \\ \text{(b.)} & l\eta \equiv s\alpha + \beta r \dfrac{P^{f_1}-1}{P^f-1} \mod. P^{f_1}-1 \\ \text{(c.)} & X^l = E'^{\alpha} E = \bar{E} \quad (p_1), \end{cases}$$

where $\bar{E}$ is also a principal unit and this system must therefore have l solutions.

Case I. $P \neq l$, i. e. $\sigma = 0$. We shall consider first the case when $P \neq l$. In this case by theorem I, we know that (c.) always has a solution, whatever $\bar{E}$ may be.

The equation (a.) has a solution when and only when $\alpha e \equiv 0 \mod. l$, and hence when $\alpha = 0$, $\xi = 0$ and when $\alpha > 0$, e must be divisible by l and hence we can put $e = l$.

In considering (b.) let us suppose first that $\alpha = 0$. (b.) then becomes

$$(b'.) \quad l\eta \equiv \beta r \cdot \frac{P^{f_1}-1}{P^f-1} \mod. P^{f_1}-1$$

and hence s is arbitrary and can be made zero. The solution of (a.) is in all cases unique and we therefore want to see if we can determine f_1 so that (b.) has l solutions.

If we put $\delta = (l, P^{f_1} - 1)$, then we know that (b′.) has solutions when and only when $\beta \cdot r \cdot \frac{P^{f_1}-1}{P^f-1} \equiv 0 \mod \delta$, and when this condition is fulfilled it has δ solutions. Since l is a prime we know that $\delta = 1$ or l and we moreover know that $f_1 = \varphi \cdot f$ is a multiple of f.

Let us consider first when $(l, P^f - 1) = 1$ and choose φ the smallest rational integer such that

$$P^{\varphi f} - 1 \equiv 0 \mod l.$$

Then $\frac{P^{\varphi f}-1}{P^f-1}$ and hence $\beta \cdot r \frac{P^{f_1}-1}{P^f-1}$ is certainly divisible by l and the condition required for l solutions of (b′.) is satisfied.

If $(l, P^f - 1) = l$ and $\beta \equiv 0 \mod l$ then we can put $\varphi = 1$, and $r = 1$, i. e.

$$w_1 = w$$

and the congruence (b′.) is now

$$l\eta \equiv \beta \mod P^f - 1$$

which will have l solutions.

If $(l, P^f - 1) = l$ and $\beta \not\equiv 0 \mod l$ then (1.) has no solution. If however we put $\varphi = l$ we have

$$\frac{P^{lf}-1}{P^f-1} = P^{f(l-1)} + P^{f(l-2)} + \cdots + P^f + 1 \equiv l \equiv 0 \mod l$$

and hence (b′.) will have l solutions.

In regard to the case when $\alpha = 0$ we can therefore sum up the results as follows.

1^0 When $(l, P^f - 1) = 1$, then (b′.) and (a.) each have one solution for $\varphi = 1$ and $e = 1$ and hence the given equation has one solution in $k(p, \mathfrak{a})$ and in this domain $x^l - A$ is the product of one linear factor by a certain number of non linear factors of un known degree. Since (b′.) has either one solution or l solutions this says that the adjunction of the irrationality of lowest relative degree which will cause atleast one of these non linear factors in $k(p, \mathfrak{a})$ to have a linear factor, will cause all of them to decompose into the product of linear factors, and hence they must all be of the same degree. Moreover the least irrationality which will do this is evedently a $(P^{\varphi f} - 1)^{\text{th}}$ root of unity, which we have already seen is in $k(p, \mathfrak{a})$ the root of an equation of degree φ. Hence the non

linear factors, of $x^l - A$ must all be of degree φ and there are therefore $\frac{l-1}{\varphi}$ such factors.

2^0 When $(l, P^l - 1) = l$ and $\beta \equiv 0 \bmod. l$, then the equation (1.) has l solutions in $k(p, \mathfrak{a})$ and $x^l - A$ is therefore the product of l linear factors in this domain.

3^0 When $(l, P^l - 1) = l$ and $\beta \not\equiv 0 \bmod. l$, then our equation has no solution in $k(p, \mathfrak{a})$ and since it is of prime degree it must therefore be irreducible.

We have seen that in this case we can cause (b'.) to have l solutions by the introduction of a primitive $(P^{l'} - 1)^{\text{th}}$ root of unity.

In the case when $\alpha = 0$ we can therefore completely solve our equation by the introduction of roots of unity alone. But we have seen in a previous section that by the introduction of such a root of unity as we have here introduced the prime π retains its character of a prime, and since (a.) is solvable for all values of e we can there fore put $e = 1$ and $s = 0$.

Since $\alpha = 0$ and hence A is a unit we know further from theorem I that the equation (1.) has a solution when and only when A is an lth power residue modulo p, and if we suppose for the time being that α is not necessarily zero but a multiple of l it is easily seen that the equation has a solution when and only when A is an lth power residue modulo $p^{\alpha+1}$.

If then $\mathfrak{A}$ is a root of the irreducible equation

$$x^l - A = 0$$

we know, from the above, that in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ the prime divisor p of $k(\mathfrak{a})$ is the product of one prime divisor of degree f and $\frac{l-1}{\varphi}$ prime divisors of degree $f\varphi$, where φ is the smallest integer such that $P^{\varphi f} - 1 \equiv 0 \bmod. l$, when A is an lth power residue in $k(a)$ modulo $p^{\alpha+1}$, and that p is itself a prime in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ when A is not an lth power residue modulo $p^{\alpha+1}$ and its degree is lf.

We take up next the consideration of the case when α is again less than l but different from zero.

In this case it is evident that (a.) does not have a solution unless

$e \equiv 0 \mod. l$ and hence the given equation must certainly be irreducible in $k(p, \mathfrak{a})$.

Besides the roots of unity introduced in the preceeding case in order that there may be l solutions it is necessary to give to e the value l which is the least value which will satisfy the required condition. This says that besides the roots of unity we must introduce a root of the equation

$$x^l = \pi w_1^{-s}$$

in order to solve the given equation.

If again we let $\mathfrak{A}$ be a root of

$$x^l - A = 0$$

since this is in the present case irreducible in $k(p, \mathfrak{a})$ we know that p is in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ the power of a single prime and since in $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ π is of order l, we know that p must be the lth power of a prime divisor of degree f.

We note here that in this case the necessary and sufficient condition that (b.) have a solution is that

$$s\alpha + \beta r \frac{P^{f_1}-1}{P^f-1} \equiv 0 \mod. \delta,$$

and when we choose f_1 again so that $\delta = (l, P^{f_1}-1) = l$, it will when this condition is satisfied have l solutions. If $P^f - 1 \not\equiv 0 \mod. l$, as before when $\varphi \neq 1$, $\beta r \cdot \frac{P^{f_1}-1}{P^f-1} \equiv 0 \mod. l$ and hence in this case $s = 0$ will suffice for s. If however $P^f - 1 \equiv 0 \mod. l$ and hence $\varphi = 1$, then again when $\beta \equiv 0 \mod. l$, $s = 0$ satisfies the conditions. But when $\varphi = 1$ and $\beta \not\equiv 0 \mod. l$ then since r is in this case 1, s must satisfy the congruence

$$s\alpha + \beta \equiv 0 \mod. l,$$

which is always possible since β and α are both relatively prime to l.

We have thus completely determined the nature of the solution of (1.) when $P \neq l$.

Case II. $P = l$ i. e. $\sigma > 0$. We shall now turn our attention to the case when p is a divisor of the rational prime l. Since w is a primitive $(l^l - 1)^{\text{th}}$ root of unity

$$w^{l^l} = w$$

and therefore w is in our domain an lth power, and in the same manner

as before the equation which we are considering is for our purpose equivalent to

$$x^l - \pi^a E = 0 \quad (p).$$

If

$$x = \pi_1^{\xi} w_1^{\eta} E'$$

is a solution we know that

$$l\eta \equiv 0 \mod. l'^{-1}$$

and hence

$$\eta \equiv 0 \mod. l'^{-1}.$$

Therefore

$$x = \pi_1^{\xi} E'$$

and in place of the equations (18.), (a.)—(c.), considered in the previous case we must now consider the equations

(19.) (a.) $l\xi = \alpha e$, (b.) not needed, (c.) $x^l = E'^{a} \cdot E \quad (p_1)$.

This system must then have l solutions and since the solution of (a.) is unique (c.) must have l solutions. But this is the case only when the domain contains the primitive l^{th} roots of unity, and such one must then be adjoined to $k(p, \mathfrak{a})$. But this adjunction gives l solutions only when there already is one solution and we shall therefore see how the domain must be changed.

We shall first settle the case when $\alpha > 0$. Then since α is relatively prime to l we can find an m such that

$$\alpha m \equiv -1 \mod. l$$

and put

$$\alpha m + 1 = q \cdot l.$$

If we then put

$$\pi = \pi_1^l \cdot E_1^m,$$

since $e = l$, (a.) will have a solution, and (c.) becomes

$$x^l = E^{q \cdot l} \quad (p)$$

which has a solution E^q in $k(p, \mathfrak{a})$. If we therefore adjoin to $k(p, \mathfrak{a})$ a root of the equation

$$x^l = \pi E^{-m} \quad (p)$$

the equation (1.) will have atleast one solution in the enlarged domain.

If however $\alpha = 0$ then (a.) will always have a solution and, in fact, the equation (1.) reduces to the case of the equation

(20.) $$x^l - E = 0 \quad (p)$$

and we must then adjoin a root of this to the domain. It therefore

remains to determine what is the nature of the irrationality which must be adjoined to $k(p, \mathfrak{a})$ in order that (20.) may have a solution, if such a solution does not exist in $k(p, \mathfrak{a})$.

Let us, in the latter case, suppose that p^t is the highest power of p such that the congruence

$$x^l \equiv E \mod. p^t \tag{21.}$$

has a solution in $k(p, \mathfrak{a})$ and let B be this solution. Then

$$t \leqq \sigma + \varkappa$$

Let $\mathfrak{A}$ be any solution of (20.). Then since B belongs to $k(p, \mathfrak{a})$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - B$ belongs to $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ and $\mathfrak{B}$ is a root of the equation

$$(x + B)^l - E = 0 \quad (p)$$

which we can write in the form

$$x^l + lBx^{l-1} + \cdots + lB^{l-1}x + B^l - E = 0 \quad (p). \tag{22.}$$

If we now put $\varkappa' = \left[\frac{t}{l}\right]$, since $t \leqq \sigma + \varkappa \leqq \sigma + \frac{\sigma}{l-1} = \frac{l\sigma}{l-1}$ we have $\frac{t}{l} \leqq \frac{\sigma}{l-1}$ and therefore $\varkappa' \leqq \varkappa$. When we therefore denote by $\mathfrak{B}'$ the quotient $\mathfrak{B}/\pi^{\varkappa'}$, then $\mathfrak{B}'$ is a root of the equation

$$x^l + \frac{l}{\pi^{\varkappa'}} Bx^{l-1} + \cdots + \frac{l}{\pi^{\varkappa'(l-1)}} B^{l-1}x + \frac{B^l - E}{\pi^{\varkappa' l}} \quad (p). \tag{23.}$$

Since $\varkappa' \leqq \frac{\sigma}{l-1}$, $(l-1)\varkappa' \leqq \sigma$ and since $\varkappa' = \left[\frac{t}{l}\right]$, $l\varkappa' \leqq t$, and hence it is easely seen that the coefficients of (23.) are all integers in $k(p, \mathfrak{a})$ and hence $\mathfrak{B}'$ is an algebraic integer.

We shall first consider the case when t is not a multiple of l. Then $\varkappa' l < t$ and hence $1 \leqq t - \varkappa' l < l$. But

$$n_{k_1}^{k_2}(\mathfrak{B}') = (-1)^l \frac{B^l - E}{\pi^{\varkappa' l}}$$

is divisible by $p^{t-\varkappa' l}$. Since the exponent is less than l we conclude that π is not a prime in the domain $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, and since the equation (20.) is irreducible it follows that p cannot be the product of powers of different prime divisors. If we therefore suppose that π_1 is a prime in the domain $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ and

$$\pi \backsim \pi_1^e$$

then $e > 1$ and since e is a divisor of l we conclude that $e = l$.

From this we can then conclude that in this case p is in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ the lth power of a prime divisor of degree f.

We can in this case write an expression for the prime π_1 as follows. Suppose that we choose n and s two rational integers such that

$$nt - ls = 1.$$

Then

$$\pi_1 = \frac{\mathfrak{B}^n}{\pi^s}$$

is a number in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$, and since

$$N_k(\pi_1) = (-1)^l \frac{(B^l - E)^n}{\pi^{ls}}$$

is of order $nt - ls = 1$, we know that π_1 is a prime number.

We now turn our attention to the case when $t = \varkappa' \cdot l$. This we have already seen in § 1 is possible only when $\varkappa' = \varkappa$ and

$$t = \varkappa l = \sigma + \varkappa$$

and hence

$$\sigma = \varkappa(l - 1).$$

If we then again turn to the equation (23.), we see that now the last two terms are both relatively prime to p. Therefore, if we denote by $F(x)$ the left hand member of (23.), we see that $F'(\mathfrak{B}')$ is relatively prime to p. Therefore, by the theorem found on page 68 of Theorie der algebraischen Zahlen, we see that (23.) has a solution in a given domain when and only when the congruence

$$F(x) \equiv 0 \mod p$$

has a solution.

But

$$F(x) \equiv x^l + w^{\beta_1} x + w^{\beta_2} \mod p.$$

where w is a primitive $(l^l - 1)^{\text{th}}$ root of unity and β_1 and β_2 are the indices of the last two coefficients of (23.).

Since the relative discriminant of (23.) is relatively prime to p it follows that in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ p cannot be divisible by a power of a prime divisor, and since $F(x)$ is irreducible in $k(p, \mathfrak{a})$ we know that p cannot be divisible by two different prime divisors, and we therefore conclude that p is in $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ a prime divisor of degree lf.

From this we can then conclude that $k(p, \mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ contains the primitive $(l^{ll} - 1)^{\text{th}}$ roots of unity, and since as we have already seen, such a root of unity is in $k(p, \mathfrak{a})$ the root of an equation of degree l, the same as the degree of $F(x)$, we know that the adjunction of a root of

$$x^{l^{ll}-1} - 1 = 0 \quad (p)$$

will cause

$$F(x) = 0 \quad (p^{(i)})$$

to have a solution, and since this is true for the domains of all prime divisors $p^{(i)}$ of p in the domain formed by the adjunction to $k(\mathfrak{a})$, of an $(l'' - 1)^{\text{th}}$ root of unity

$$F(x) = 0 \quad (p)$$

also has a solution in this domain.

Hence in this case the adjunction of a primitive $(l'' - 1)^{\text{th}}$ root of unity to $k(p, \mathfrak{a})$ will suffice to solve (20.).

If however $k(p, \mathfrak{a})$ does not contain a primitive l^{th} root of unity in each case there will be only one solution and to have l solutions we must still farther enlarge the domain by the adjunction of such a root of unity.

When

$$x^l - E = 0 \quad (p)$$

has one solution in $k(p, \mathfrak{a})$ then it is reducible and has atleast one linear factor in this domain, and certain non linear or linear factors which are of a degree yet unknown. Since if we adjoin to $k(p, \mathfrak{a})$ an irrationality which will cause one of these factors to have a linear factor, they will all decompose into the product of linear factors, because there are either l solutions or one solution, we conclude that the unknown factors of $x^l - E$ are all of the same degree.

We moreover know that they all reduce to the product of linear factors when we adjoin to $k(p, \mathfrak{a})$ a root of the equation

$$x^l - 1 = 0 \quad (p)$$

it being understood that this root is different from 1.

We therefore want to see what the effect upon $k(p, \mathfrak{a})$ is when we adjoin this number.

We have already seen that the adjunction of a primitive l^{th} root of unity is equivalent to the adjunction of a root of the equation

$$x^{l-1} = -l \quad (p) \tag{24.}$$

and we shall therefore turn our attention to this equation.

We know that $-l$ is of order σ and hence

$$-l = \pi^{\sigma} w^{\beta} E_1 \quad (p)$$

If η is a solution of (24.) and π_1 a prime number in $k(p, \mathfrak{a}, \eta)$ and w_1 a primitive $(l'^{f_1} - 1)^{\text{th}}$ root of unity in this domain, where f_1 is the degree of the prime divisor p_1 corresponding to π_1, then

$$\pi = \pi_1^{e_1} w_1^s E_1' \quad (p),$$
$$w = w_1^r \frac{l^{\varphi^l} - 1}{l^l - 1}$$

and therefore

$$-l = \pi_1^{e_1 \sigma} w_1^{s\sigma + \beta r \frac{l^{\varphi^l}-1}{l^l-1}} E_1'^{\sigma} E_1 \quad (p_1).$$

But since $E_1'^{\sigma} \cdot E_1$ is a principal unit and hence 1 is a solution of the congruence

$$x^{l-1} \equiv E_1'^{\sigma} \cdot E_1 \mod p, \tag{25.}$$

by using the method used in the proof of theorem I, we can show that the equation (25.) always has a solution, whatever unit E' may be, and we can therefore put $E' = 1$.

The equation (24.) can now be written in the form

$$x^{l-1} = \pi_1^{e_1 \sigma} \cdot w^{s\sigma + \beta r \frac{l^{\varphi^l}-1}{l^l-1}} E_1 \quad (p),$$

and since E_1 is an $l-1^{\text{th}}$ power in $k(p, \mathfrak{a})$ this is equivalent to

$$x^{l-1} = \pi_1^{\sigma e_1} \cdot w_1^{s\sigma + \beta r \frac{l^{\varphi^l}-1}{l^l-1}} \quad (p).$$

But this equation we know has a solution in $k(p, \mathfrak{a}, \eta)$ and hence if this solution is

$$x = \pi_1^{\xi} w_1^{\eta} X \quad (p_1)$$

as before

$$\begin{cases} \text{(a.)} & (l-1)\xi = e_1 \sigma, \\ \text{(b.)} & (l-1)\eta \equiv s\sigma + \beta r \frac{l^{\varphi^l}-1}{l^l-1} \mod l^{\varphi^l} - 1, \\ \text{(c.)} & X^{l-1} = 1 \ (p). \end{cases} \tag{26.}$$

But (c.) says that X is an $(l-1)^{\text{th}}$ root of unity and since it is a principal unit it must be equal to 1.

It remains therefore only to study the relations (a.) and (b.).

If we denote by φ_1 the greatest common divisor of σ and $l-1$ we see that e_1 must be divisible by $\frac{l-1}{\varphi_1}$, and since the value of e_1 does not effect the congruence (b.) we can put $e_1 = \frac{l-1}{\varphi_1}$.

Since $l-1$ is a factor of $l^{\varphi^l}-1$ we know that the necessary and sufficient condition, that (b.) shall have a solution is that

$$s\sigma + \beta r \cdot \frac{l^{\varphi^l}-1}{l^l-1} \equiv 0 \mod l-1.$$

But $l^l - 1 \equiv 0 \mod l-1$ and hence

$$l^l \equiv 1 \mod l-1.$$

Therefore

$$\frac{l^{\varphi l}-1}{l^l-1} = l^{l(\varphi-1)} + l^{l(\varphi-2)} + \cdots + l^l + 1 \equiv \varphi \mod l-1$$

and we have that

(27.) $$s\sigma + \beta r \cdot \varphi \equiv 0 \mod l-1$$

is the condition which s, r and φ must satisfy in order that (b.) may have a solution; r must here be prime relatively to l^l-1 and hence to $l-1$, since w is a primitive $(l^l-1)^{\text{th}}$ root of unity.

We now get a solution of (27.) as follows: We had $\varphi_1 = (\sigma, l-1)$; if we put further

$$s_1 = (\beta, l-1), \ \delta = (\varphi_1, s_1) \text{ and hence}$$
$$\sigma = \varphi_1 \bar{\sigma}, \ \beta = s_1 \bar{\beta}, \ \varphi_1 = \delta \bar{\varphi}_1, \ s_1 = \delta \bar{s}_1,$$

and if we now put in (27.): $s = \bar{s}_1$, $\varphi = \bar{\varphi}_1$, then (27.) becomes

$$\varphi_1 \bar{\sigma} \bar{s}_1 + s_1 \bar{\beta} \bar{\varphi}_1 \cdot r \equiv 0 \mod l-1$$

and hence

$$\bar{\sigma} + \bar{\beta} r \equiv 0 \mod \frac{l-1}{\mu},$$

where $\mu = \delta \bar{\varphi}_1 \bar{s}_1 = [\varphi_1, s_1]$ ($[\varphi_1, s_1]$ means the least common multiple). But $\bar{\beta}$ and $\bar{\sigma}$ are relatively prime to $\frac{l-1}{\mu}$, as is easily seen, and we can therefore find an r_0, relatively prime to $\frac{l-1}{\mu}$, such that

(28.) $$\bar{\sigma} + \bar{\beta} r_0 \equiv 0 \mod \frac{l-1}{\mu}.$$

But we must find r relatively prime to l^l-1. This however we can easily find from the r_0 found above. Let us denote by c the product of all the prime factors, which are common divisors of l^l-1 and r_0, each having in c the same exponent as in l^l-1. The number c is then necessarily relatively prime to $\frac{l-1}{\mu}$, because all the prime factors of c are factors of r_0. But $\frac{l-1}{\mu}$ is a divisor of l^l-1 and hence also of $\frac{l^l-1}{c}$.

If we now put

$$r = r_0 + \frac{l^l-1}{c}$$

we have

$$r \equiv r_0 \mod \frac{l-1}{\mu}$$

and hence r is also a solution of the congruence (28.). But r is moreover relatively prime to $l'-1$ because if q is any prime factor of $l'-1$, if it is a factor of c it is a factor of r_0 but not of $\frac{l'-1}{c}$, and if it is a factor of $\frac{l'-1}{c}$ it is not a factor of c and hence not of r_0 and hence not of r.

To have a solution of (24.) and hence l solutions of (20.) we see that it is necessary to enlarg the domain by the adjunction of an $(l^{\varphi'}-1)^{\text{th}}$ root of unity w_1, where $\varphi = \overline{\varphi}_1 = \frac{[\varphi_1, (\beta, l-1)]}{(\beta, l-1)}$; and to this domain again adjoin a root of the equation

$$x^{e_1} = \pi w_1^{-s} \quad (p),$$

where

$$s = \frac{[\varphi_1, (\beta, l-1)]}{(\sigma, l-1)}$$

and $e_1 = \frac{l-1}{\varphi_1}$.

That is

$$\varphi = \frac{[(\sigma, l-1), (\beta, l-1)]}{(\beta, l-1)}, \qquad s = \frac{[(\sigma, l-1), (\beta, l-1)]}{(\sigma, l-1)},$$

and

$$e_1 = \frac{l-1}{(\sigma, l-1)}.$$

But the adjunction of w_1 causes the irreducible factors of $x^l - A$ to be decomposed into factors whose degree is $\frac{1}{\varphi}$ times the original degree and since an irrationality of degree e_1 causes these again to be decomposed into linear factors, we know that the degree of the irreducible factors in $k(p, \mathfrak{a})$ is $e_1 \cdot \varphi$*), which says that there are $\frac{l-1}{e_1 \varphi}$ such factors. It is not difficult to show from the above relation that

$$\frac{l-1}{(e_1 \varphi)} = (l-1, \beta, \sigma).$$

From this we then know that when $x^l - A$ is reducible in $k(p, \mathfrak{a})$, in the domain $k(\mathfrak{a}, \mathfrak{A})$ p is the product of a prime divisor of degree f and the e_1^{th} powers of $(l-1, \beta, \sigma) = \delta$ prime divisors of degree φf.

*) Algebraischen Zahlen. Kap. 8, § 7.

Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen.

Von Herrn *Adolf Fraenkel* in München.

Einleitung.

Seit langem sind in die Arithmetik neben den sogenannten Körpern, in denen alle gewöhnlichen Rechengesetze wie für die rationalen Zahlen gelten, auch verschiedene Bereiche von Elementen eingeführt worden, die so umfassend und so in sich abgeschlossen sind, daß zwar Addition, Subtraktion und Multiplikation in ihnen unbeschränkt und eindeutig und auch in Übereinstimmung mit allen oder doch den wichtigsten formalen Gesetzen der Arithmetik ausgeführt werden können, aber die Division überhaupt nicht allgemein oder nicht immer eindeutig möglich ist. Das trivialste Beispiel eines solchen, mit Herrn *Hilbert* als *Ring**) zu bezeichnenden Bereiches stellt jedes Kongruenzklassensystem für eine beliebige zusammengesetzte natürliche Zahl als Modul dar; als einige weitere Beispiele derartiger Ringe seien verschiedene Arten von Systemen höherer komplexer Zahlen**) genannt, ferner Ringe von Matrizen oder von Modulsystemen

*) Eine nähere Präzisierung dessen, was — etwas abweichend von Herrn *Hilbert* — im nachfolgenden Aufsatz unter einem Ring verstanden wird, ist in § 1 gegeben.

**) Man vergleiche besonders eine Abhandlung von *Weierstraß* (mit zusätzlichen Bemerkungen von Herrn *H. A. Schwarz*; Nachr. v. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, a. d. Jahre 1884, S. 395—419 [= *Weierstraß*' Mathem. Werke, II, S. 311—337]) sowie die sich daran anschließenden Aufsätze der Herren *H. A. Schwarz* (ebenda, S. 516—519 bzw. S. 337—339 [= *Schwarz*' Ges. math. Abh., II, S. 346—349]), *Dedekind* (ebenda, a. d. J. 1885, S. 141—159; vgl. auch ebenda, a. d. J. 1887, S. 1—7), *Hölder* (ebenda, a. d. J. 1886, S. 241—244), *J. Petersen* (ebenda, a. d. J. 1887, S. 489—502), *Hilbert* (ebenda, math.-phys. Kl., a. d. J. 1896, S. 179—183) sowie besonders des Herrn *Study* (ebenda, math.-phys. Kl.,

und schließlich die Bereiche der g-adischen Zahlen*). Es ist übrigens wesentlich zu unterscheiden, ob die Ringeigenschaft nur künstlich oder aber natürlich ist, nämlich ob man durch „Quotientenbildung“ (d. h. Adjunktion von Element*paaren* wie bei der Einführung der rationalen Zahlen) die Division unbeschränkt ausführbar und den Ring, der alsdann nur ein Integritätsbereich war, zum Körper machen kann — oder nicht; nur die Bereiche der letzteren Art fallen unter die folgenden Betrachtungen, in denen zu der rein arithmetischen Unterscheidung zwischen ganzen und gebrochenen Elementen keine Veranlassung vorliegt; sie sind vor den Körpern dadurch „ausgezeichnet“, daß in ihnen ein Produkt sehr wohl Null sein kann, ohne daß einer der Faktoren verschwindet, daß die Null hier also eigentliche Teiler besitzt.

Da nun die Ringe nicht allein in der Zahlentheorie, sondern auch in anderen weiten Gebieten der Arithmetik eine wichtige Rolle spielen, so dürfte es als ein Problem von Bedeutung erscheinen, die Ringe im allgemeinen, unter möglichstem Verzicht auf die Benutzung spezieller Eigenschaften, in bezug auf ihre möglichen Typen und die in ihnen herrschenden allgemeinen algebraischen Gesetze zu untersuchen, ähnlich wie dies vor kurzem Herr *Steinitz* für die Körper unternommen und vollständig durchgeführt hat**). Hier zeigt sich aber sogleich bei den ersten

---

a. d. J. 1898, S. 1—8), in denen eine spezielle Klasse von Systemen höherer komplexer Zahlen betrachtet wird, die in augenfälliger Weise in den Rahmen des nachfolgenden Aufsatzes fällt; man vgl. hierfür das „Schlußergebnis“ auf S. 175. Zum Vergleich sei noch besonders auf den außerordentlich viel weiteren Umfang des Gebiets der hier behandelten Systeme „höherer komplexer Zahlen“ hingewiesen: als Koeffizienten der Haupteinheiten höherer komplexer Zahlen werden gewöhnlich (auch in den oben zitierten Aufsätzen) nur reelle oder gemeine komplexe Zahlen zugelassen, neuerdings besonders in amerikanischen Arbeiten auch Elemente eines beliebigen Körpers; im vorliegenden Aufsatz dagegen (vgl. das erwähnte Schlußergebnis) gehören die Koeffizienten jeder einzelnen Haupteinheit e_i je einem besonderen Bereich $\mathfrak{R}_i$ an und zwar nicht notwendig einem Körper, sondern allgemeiner einem einfachsten Ring $\mathfrak{R}_i$ von der Art, daß jeder Nullteiler von $\mathfrak{R}_i$ im wesentlichen eine Potenz eines bestimmten, ein für allemal fest gewählten Nullteilers von $\mathfrak{R}_i$ ist.

*) Die g-adischen Zahlen hat Herr *Hensel* in die Arithmetik eingeführt in seiner jüngst erschienenen „Zahlentheorie“ (Berlin u. Leipzig [Göschen] 1913).

**) *E. Steinitz*: Algebraische Theorie der Körper, dieses Journal, Bd. 137 (1910), S. 167—309.

Schritten eine wesentliche Schwierigkeit darin, daß wegen der nur beschränkten und im allgemeinen nicht eindeutigen Ausführbarkeit der Division und wegen der Existenz echter Teiler der Null die grundlegendsten algebraischen Sätze und Methoden auf Ringe nicht ausgedehnt werden können; z. B. kann offenbar eine Gleichung mit Koeffizienten aus einem Ring in diesem sehr wohl mehr Wurzeln haben, als ihr Grad angibt, auch sogar unendlich viele Wurzeln.

Für die speziellen Ringe der g-adischen Zahlen hat nun Herr *Hensel* im fünften Kapitel seines erwähnten Buches diese Schwierigkeiten vollkommen beseitigt, indem er diese Ringe auf Grund ihrer besonderen Eigenschaften, namentlich auf Grund der Eigentümlichkeiten gewisser, explizit zu berechnender g-adischer Zahlen, auf jeweils endlichviele Körper zurückzuführen lehrte. Durch diese interessanten Ergebnisse angeregt, versuchte ich, ob nicht auch für die allgemeinen Ringe eine ähnliche Reduktion und damit ein Eingangsweg für weitere Untersuchungen ermöglicht werden könne. In der Tat zeigte sich, daß für eine sehr weite, durch abstrakte Bedingungen festgelegte Klasse von Ringen mittels allgemeiner Methoden eine Zurückführung geleistet werden kann zwar im allgemeinen nicht auf Körper, aber auf spezielle, durch einfache Struktur ausgezeichnete Ringe, in denen sich insbesondere alle Fragen der Division ohne weiteres entscheiden lassen (vgl. die Sätze 7ff. des § 4 auf S. 172ff.).

Der Durchführung dieser Untersuchung ist der folgende Aufsatz gewidmet, dem zur leichteren Übersicht über die sich in größerer Anzahl als notwendig erweisenden neuen Begriffsbildungen ein *Verzeichnis der Termini* angefügt ist. Zur Erläuterung der zuweilen der Natur der Sache nach etwas abstrakten Gedankengänge und der manchmal paradox erscheinenden Verhältnisse in Ringen sind häufig kurze Beispiele eingefügt; dagegen wurde von eigentlichen Anwendungen auf spezielle Ringe Abstand genommen, weil dies meist längere Hilfsbetrachtungen erfordern würde und daher besser einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleibt. Mittels der Ergebnisse dieser Arbeit hoffe ich die nähere Untersuchung der Ringe in dem früher angegebenen Sinn bei nächster Gelegenheit weiter fortsetzen zu können.

§ 1. Die Ringe im allgemeinen.

Den Gegenstand aller nachfolgenden Betrachtungen bildet ein System $\mathfrak{R}$ von Elementen, in dem entweder irgend je zwei Elemente als unter-

einander ungleich gelten oder aber eine reflexive, symmetrische und transitive Relation = (Gleichheit) zwischen gewissen Elementen definiert ist, so daß also für jedes Element a aus $\mathfrak{R}$ stets $a = a$ gilt und, falls b und c ebenfalls Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind, aus $a = b$ stets $b = a$, aus $a = b$, $b = c$ stets $a = c$ folgt. Im ersten Fall stellt die Identität eine solche Relation dar. Sind zwischen den Elementen des Systems auch noch Operationen, etwa eine Addition oder eine Multiplikation, definiert, so ist die Gleichheit als derart erklärt vorauszusetzen, daß bei diesen Operationen irgendwelche als gleich definierte Elemente einander vertreten können.

Ist im System $\mathfrak{R}$ eine beliebige Verknüpfungsoperation $\times$ zwischen je zwei Elementen definiert, so besage, wie üblich, die Ausdrucksweise „die Elemente von $\mathfrak{R}$ bilden in bezug auf die Operation $\times$ eine Gruppe“, daß die folgenden 4 Bedingungen*) erfüllt sind:

1. Aus irgend zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Elementen a und b aus $\mathfrak{R}$ kann vermittels der Operation $\times$ eindeutig ein Element c gewonnen werden, das ebenfalls dem System $\mathfrak{R}$ angehört; es soll auch durch $c = a \times b$ bezeichnet werden.

2. Sind a, b, c irgend drei Elemente aus $\mathfrak{R}$, so ist stets $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

3. $\mathfrak{R}$ enthält mindestens ein Element n von der Art, daß für jedes Element a aus $\mathfrak{R}$ stets $a \times n = a$ ist.

4. Enthält $\mathfrak{R}$ Elemente von der in 3. geforderten Art, so gibt es unter ihnen ein besonderes $\bar{n}$ derart, daß $\mathfrak{R}$ zu jedem Element a mindestens ein Element a' enthält, für das $a \times a' = \bar{n}$ ist.

Diese Bedingungen sind unabhängig, gleichviel ob $\mathfrak{R}$ endlich oder unendlich viele Elemente enthält, und aus ihnen können alle Eigenschaften einer Gruppe gefolgert werden. Insbesondere sind die in 3. und 4. erklärten Elemente n und a' jeweils — abgesehen von zu ihnen gleichen Elementen — eindeutig bestimmt und sollen als neutrales Element

*) Diese Definition der Gruppe sowie ein Teil der zur Definition des Ringes verwendeten Bedingungen schließen sich an die Herren *Moore* und *Dickson* an (*Dickson* in den Transact. of the Amer. Math. Soc., Vol. 6 [1905], p. 198—204; vgl. auch die Darstellung in *Pascals* Repertor. der höh. Math., 2. Aufl., I. Bd., 1. Hälfte [Leipz. 1910], S. 172f., und in Herrn *Loewys* 1914 bei Veit & Comp. erscheinendem Lehrbuch: Algebra, I. Teil: Grundlagen d. Arithmetik, S. 24 ff. u. 33 ff., welch letzterem ich auch in der Darstellung der Gleichheit und öfters in diesem Paragraphen gefolgt bin).

der Gruppe bzw. als zu a inverses Gruppenelement gelegentlich bezeichnet werden.

Sind nur die ersten drei Bedingungen erfüllt, so werde $\mathfrak{R}$ als eine Paenegruppe*) bezeichnet.

Ein Ring heiße das System $\mathfrak{R}$, wenn die folgenden 10 Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$ erfüllt sind**):

$R_{1)}$ *Aus irgend zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Elementen a und b aus $\mathfrak{R}$ kann vermittels einer Operation, die mit $+$ bezeichnet werde und Addition heiße, eindeutig ein Element c aus $\mathfrak{R}$ gewonnen werden, das auch als $c = a + b$ oder als Summe von a und b bezeichnet werden soll.*

$R_{2)}$ *Für irgend drei Elemente a, b, c aus $\mathfrak{R}$ ist stets $a + (b + c) = (a + b) + c$.*

$R_{3)}$ *$\mathfrak{R}$ enthält mindestens ein Element O von der Art, daß $a + O = a$ ist für jedes Element a aus $\mathfrak{R}$.*

$R_{4)}$ *Unter den Elementen O gibt es ein besonderes $\bar{O}$ von der Art, daß $\mathfrak{R}$ zu jedem Element a mindestens ein Element $(-a)$ enthält, für das $a + (-a) = \bar{O}$ ist.*

Diese vier ersten Bedingungen besagen, daß $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Addition eine Gruppe bildet; das in bezug auf die Addition neutrale Element O***) werde als das Nullelement oder die Null des Systems $\mathfrak{R}$ bezeichnet.

---

*) Nicht zu verwechseln mit dem von Herrn *Dickson* (Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 6 [1905], p. 205) eingeführten Begriff der Halbgruppe (semi-group).

**) Die Bedingungen sind des leichteren Vergleichs wegen so formuliert, daß $R_{1)}$ bis $R_{7)}$ und $R_{10)}$ mit den entsprechenden Körperbedingungen bei *Dickson* und *Loewy* identisch, $R_{8)}$ und $R_{9)}$ den entsprechenden analog sind; $R_{1)}$ bis $R_{4)}$ besagen, daß die Elemente von $\mathfrak{R}$ in bezug auf die Addition eine Gruppe bilden, $R_{5)}$ bis $R_{8)}$, daß sie in bezug auf die Multiplikation *möglichst*, nämlich nach Ausschluß der Nullteiler, eine Gruppe bilden. *Einschränkender Natur* sind von den 10 Bedingungen nur $R_{7)}$, $R_{8)}$ und $R_{9)}$; $R_{8)}$ schließt bei kommutativer Multiplikation nur die in der Einleitung als „künstlich“ bezeichneten Ringe aus und ist dann durch Quotientenbildung zu befriedigen, während $R_{7)}$ und $R_{9)}$ wesentliche Anforderungen stellen, welche zum mindesten nicht gänzlich weggelassen werden können, will man nicht zu einer ganz anderen und viel weniger weitgehenden Theorie gelangen als der im folgenden entwickelten.

***) Bei Elementen, die, abgesehen von zu ihnen gleichen, eindeutig bestimmt sind, soll stets in dieser Weise der bestimmte Artikel gebraucht und von eindeutiger Bestimmtheit schlechthin gesprochen werden.

Nach den bekannten Eigenschaften einer Gruppe gilt:

Satz 1: *Für Elemente a, b eines Ringes $\mathfrak{R}$ ist stets:* $a + O = O + a = a$, $a + (-a) = (-a) + a = O$, $-(a+b) = (-b) + (-a)$; *ferner gilt das assoziative Gesetz für die Addition beliebig vieler Elemente aus $\mathfrak{R}$ und schließlich ist jede Lösung der Gleichung $a + x = b$ bzw. $y + a' = b'$ aus $\mathfrak{R}$ gleich dem Element $x = (-a) + b$ bzw. $y = b' + (-a')$, d. h. die Addition ist eindeutig umkehrbar.* Für $a + (-b)$ werde kürzer $a - b$ geschrieben.

Die weiteren Bedingungen für einen Ring sind:

$R_{5)}$ *Aus irgend zwei in bestimmter Reihenfolge gegebenen Elementen a und b aus $\mathfrak{R}$ kann vermittels einer Operation, die mit $\cdot$ bezeichnet werde und Multiplikation heiße, eindeutig ein Element c aus $\mathfrak{R}$ gewonnen werden, das auch als $c = a \cdot b$ oder als Produkt von a und b bezeichnet werden soll.*

$R_{6)}$ *Für irgend drei Elemente a, b, c aus $\mathfrak{R}$ ist stets $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*

$R_{7)}$ *$\mathfrak{R}$ enthält mindestens ein Element ε von der Art, daß für jedes Element a aus $\mathfrak{R}$ $a \cdot \varepsilon = a$ ist;* ein solches Element ε heiße ein Einheitselement von $\mathfrak{R}$.

Definition 1: Gibt es zu einem Element b aus $\mathfrak{R}$ ein zweites $a \neq O$ in $\mathfrak{R}$, so daß $a \cdot b = O$ ist, so heiße mit *Weierstraß* b ein Teiler der Null oder ein Nullteiler. Ein Element aus $\mathfrak{R}$, das kein Nullteiler ist, werde als regulär bezeichnet.

Beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$ sollen im folgenden mit lateinischen, reguläre mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

$R_{8)}$ *Unter den Einheitselementen ε von $\mathfrak{R}$ gibt es ein besonderes $\bar{\varepsilon}$ von der Art, daß $\mathfrak{R}$ zu jedem regulären Element α mindestens ein Element α^{-1} enthält, für das $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \bar{\varepsilon}$ ist. α^{-1} heiße ein zu α reziprokes Element.*

$R_{9)}$ *Sind a und b irgend zwei Elemente aus $\mathfrak{R}$, so gibt es zu ihnen ein reguläres Element $\alpha_{a,b}$ in $\mathfrak{R}$, so daß $a \cdot b = \alpha_{a,b} \cdot b \cdot a$ ist, und ein reguläres Element $\beta_{a,b}$, so daß $a \cdot b = b \cdot a \cdot \beta_{a,b}$ ist. Die Multiplikation im Ring braucht also nicht kommutativ zu sein, aber $a \cdot b$ und $b \cdot a$ unterscheiden sich voneinander höchstens um einen vorne oder hinten hinzuzufügenden regulären Faktor.*

$R_{10)}$ *Sind a, b, c irgend drei Elemente aus $\mathfrak{R}$, so gelten die distributiven Gesetze:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Ist insbesondere in $\mathfrak{R}$ die Multiplikation kommutativ, so genügt es, *eines* der distributiven Gesetze zu fordern. $\mathfrak{R}$ heiße in diesem Fall ein kommutativer Ring.

Fügt man noch die Bedingung hinzu, daß ein Produkt nur dann verschwinde, wenn dies von einem der Faktoren gilt, oder, was dasselbe ist, daß zu *jedem* zu Null ungleichen Element ein reziprokes in $\mathfrak{R}$ existieren solle, so geht bekanntlich ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ in einen Körper über; ist die Multiplikation in einem derartigen Ring nicht kommutativ — in diesem Fall wird übrigens die Bedingung $R_{9)}$ überflüssig —, so will ich mit den Herren *Zermelo* und *Blumberg**) von einem nichtkommutativen Körper sprechen.

In einem Ring bilden die Elemente auch bei Ausschluß der Null keine Gruppe in bezug auf die Multiplikation, sondern nur eine Paenegruppe, und es gelten in der Tat die dem Satze 1 analogen Behauptungen nicht sämtlich für die Multiplikation in Ringen. Doch folgt noch auf gleiche Weise wie für Körper:

Satz 2: *Für jedes Element a eines Ringes $\mathfrak{R}$ ist $a \cdot O = O \cdot a = O$; für irgend zwei Elemente a und b aus $\mathfrak{R}$ ist:*

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b), \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Enthält $\mathfrak{R}$, wie zur Vermeidung von Trivialitäten stets angenommen werden soll, wenigstens ein zu O ungleiches Element, so sind Addition und Multiplikation verschiedene Operationen, und jedes Einheitselement ist ungleich Null. Das assoziative Gesetz gilt für die Multiplikation beliebig vieler Elemente aus $\mathfrak{R}$.

Aus $R_{9)}$ und der ersten Behauptung von Satz 2 folgt noch, daß auch *a ein Nullteiler ist, wenn $a \cdot b = O$ und $b \neq O$ ist;* eine Unterscheidung zwischen Nullteilern der ersten und der zweiten Art braucht hier also nicht gemacht zu werden.

Satz 3: *Die Addition ist in jedem Ring kommutativ. Auch bei der Multiplikation endlichvieler Faktoren aus einem Ring darf die Reihenfolge beliebig geändert werden, wenn nur vorn oder hinten ein geeignet gewählter regulärer Faktor hinzugefügt wird. Die vordere multiplikative Hinzu-*

---

*) Vgl. Bull. of the Amer. Mathem. Soc., vol. 19 (1913), p. 58f..

fügung eines Einheitselements läßt ebenso wie die hintere jedes Ringelement ungeändert; das Einheitselement eines Ringes ist daher eindeutig bestimmt. Ein Ring enthält zu keinem Nullteiler ein reziprokes Element, und die Gesamtheit aller regulären Elemente eines Ringes bildet in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe.

Beweis: Sind a und b zwei beliebige Elemente eines Ringes $\mathfrak{R}$, ε ein Einheitselement von $\mathfrak{R}$, so ist nach dem ersten distributiven Gesetz

$$(a+b)\cdot(\varepsilon+\varepsilon)=a+b+a+b,$$

nach dem zweiten

$$(a+b)\cdot(\varepsilon+\varepsilon)=a\cdot(\varepsilon+\varepsilon)+b\cdot(\varepsilon+\varepsilon)=a+a+b+b,$$

so daß nach Satz 1 in der Tat folgt: $a+b=b+a$, was sich in bekannter Weise auf mehr als zwei Summanden überträgt. Weiter ist nach $R_{7)}$ und $R_{9)}$: $a=a\cdot\varepsilon=\varepsilon\cdot a\cdot\beta_{a,\varepsilon}$, woraus durch vordere Multiplikation mit ε die zu beweisende Relation $\varepsilon\cdot a=a$ folgt. Ferner sei $a\cdot b=O=b\cdot a$, aber $b\neq O$; existierte dann a^{-1} so, daß $a\cdot a^{-1}=\varepsilon$ wäre, so folgte $O=b\cdot a\cdot a^{-1}=b\cdot\varepsilon=b$ gegen die gemachte Voraussetzung, d. h. Nullteiler besitzen wirklich keine Reziproken. Das Produkt zweier regulärer Elemente $\alpha\cdot\beta$, zu dem ja $\beta^{-1}\cdot\alpha^{-1}$ reziprok ist, ist daher wieder regulär, woraus mit Rücksicht auf $R_{6)}$, $R_{7)}$ und $R_{8)}$ die letzte Behauptung von Satz 3 folgt. Aus dieser schließlich ergibt sich bei wiederholter Anwendung von $R_{9)}$ die Richtigkeit der Aussage über die Veränderung der Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplikation.

Die natürlichen *Potenzen* eines Ringelements, die mehrfach vorkommen werden, seien gleich hier in bekannter Weise eingeführt durch die Definitionen

$$a=a^1,\quad a^m\cdot a=a^{m+1},$$

wo a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, dagegen $1, 2, \ldots m, \ldots$ nur abkürzende Symbole und nicht etwa Ringelemente sind*); die gewöhnlichen Rechenregeln wie $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ usw. sind leicht herzuleiten. Gelegentlich wird auch die Schreibweise $a^0=\varepsilon$ benutzt werden.

---

*) Auch die Addition dieser Symbole hat natürlich mit der im Ring definierten Addition nichts zu tun; die Benutzung der gewöhnlichen Operationszeichen für die Addition, Subtraktion und Multiplikation ganzer Zahlen wird an den wenigen Stellen, wo sie auftreten, zu Mißverständnissen wohl nicht führen.

Es sei auch hier schon als Beispiel eine höchst einfache Klasse von Ringen angeführt, von der später zur Illustration der einzelnen Sätze und Gedankengänge ausgiebiger Gebrauch gemacht werden soll. m sei eine beliebige natürliche Zahl >1; dann betrachte ich die Klassen derjenigen ganzen Zahlen (oder allgemeiner rationalen Zahlen mit zu m teilerfremden Nennern in der reduzierten Form), die der Reihe nach den Zahlen $0, 1, 2, \ldots m-1$ modulo m kongruent sind, und bezeichne auch diese Klassen selbst gleich mit $0, 1, \ldots m-1$. Wird die Addition, Subtraktion, Multiplikation und, soweit möglich, auch die Division dieser Klassen in der gewöhnlichen Weise, nur stets modulo m, ausgeführt, so hat man in dem System dieser Klassen einen Ring, der allen Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$ genügt, den Ring R_m der Kongruenzklassen modulo m. Er ist dann und nur dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist, in jedem andern Fall aber ein kommutativer Ring, der außer der Null noch weitere Nullteiler enthält. Z. B. sind in R_{360} alle und nur die Klassen Nullteiler, die durch mindestens einen der Primfaktoren 2, 3, 5 von 360 teilbar sind; so sind etwa 5 und 72 Nullteiler, weil $5 \cdot 72 = 0$ und $72 \neq 0$, $5 \neq 0$ ist.

Definition 2: Ist $a = b \cdot c$, wo a, b, c Elemente eines Ringes $\mathfrak{R}$ bedeuten, so heißt a durch c teilbar, c ein Teiler von a oder in a enthalten usw.. — Ist allgemeiner $a = b \cdot c \cdot d$, so ist ebenfalls a durch c teilbar; denn nach $R_{9)}$ ist: $a = b \cdot c \cdot d = b \cdot a_{c,d} \cdot d \cdot c$.

Definition 3: Ist sowohl a durch b wie auch b durch a teilbar, so heißen a und b unwesentlich verschieden oder äquivalent ($a \backsim b$); in jedem andern Fall heißen a und b wesentlich verschieden. Ist insbesondere a durch b, aber b nicht durch a teilbar, so heißt b ein echter Teiler von a.

Die so definierte Äquivalenz ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. Alle regulären Elemente sind untereinander, also speziell auch mit dem Einheitselement äquivalent.

Z. B. ist in R_{360} $25 \backsim 5$ und $7 \backsim 1$, weil $25 = 5 \cdot 5$, $5 = 29 \cdot 25$ und $7 = 7 \cdot 1$, $1 = 103 \cdot 7$ ist. Dagegen sind 2 und 4 wesentlich verschieden, weil 2 durch 4 nicht teilbar ist; da andererseits $4 = 2 \cdot 2$ ist, so ist 2 ein echter Teiler von 4.

Satz 4: *Unterscheiden sich a und b nur um reguläre Faktoren, so ist $a \backsim b$.*

Denn aus $\alpha_1 \cdot a \cdot \alpha_2 = \beta_1 \cdot b \cdot \beta_2$ folgt:

$$a = \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1 \cdot b \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1}, \quad b = \beta_1^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot a \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2^{-1}.$$

Die außerordentlich viel tiefer liegende Umkehrung dieses Satzes wird erst viel später und nur für eine besondere Klasse von Ringen bewiesen werden (Satz 6 des § 3 auf S. 167).

Definition 4: Ein Ring heiße endlich oder von der endlichen Ordnung m*), wenn die Zahl seiner ungleichen Elemente endlich und zwar gleich m ist; enthält er unendlich viele ungleiche Elemente, so heiße er unendlich oder von unendlich hoher Ordnung.

Definition 5: Ein Ring heiße von endlichem Grade n, wenn die Zahl seiner *wesentlich verschiedenen* Elemente endlich und zwar gleich n ist; enthält er unendlich viele wesentlich verschiedene Elemente, so heiße er von unendlich hohem Grad.

Während jeder endliche Ring endlichen Grad besitzt, kann natürlich ein Ring von endlichem Grad sehr wohl eine abzählbar unendliche oder größere Mächtigkeit von Elementen besitzen. Z. B. ist nicht nur jeder Ring von Kongruenzklassen für irgendeinen Modul, sondern auch der Ring der rationalen g-adischen Zahlen für irgendeine natürliche Zahl g**) von endlichem Grad, nämlich vom Grad 2^n, wenn n die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von g bezeichnet, ebenso jeder Ring algebraischer g-adischer Zahlen; dagegen besitzt die Menge aller *ungleichen* Elemente dieser Ringe die Mächtigkeit des Kontinuums. Jeder Ring unendlich hohen Grades enthält (sogar unendlich viele wesentlich verschiedene) Elemente (z. B. die Null), welche durch unendlich viele wesentlich verschiedene Nullteiler teilbar sind.

Zum Schluß dieses Paragraphen soll noch gezeigt werden, daß die Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$, durch die ein Ring definiert wurde, untereinander unabhängig sind. Da alle 10 Bedingungen stets erfüllt sind für Körper, in denen ja die Multiplikation kommutativ ist und durch jedes von Null verschiedene Element dividiert werden kann, so wird die Unabhängigkeit jeder der Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{8)}$ sowie $R_{10)}$ von den neun übrigen gewährleistet durch die Pseudokörper, welche man zum Nachweis der Unabhängigkeit der entsprechenden Körperbedingungen konstruiert hat***). Es ist daher nur mehr die Unabhängigkeit der Bedingung $R_{9)}$ von den übrigen zu zeigen.

Zu diesem Zweck betrachte ich das System aller „Quaternionen“

---

*) Etwas speziellere Ringe endlicher Ordnung sind jüngst von Herrn *H. S. Vandiver* auf einige Eigenschaften hin untersucht worden: Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 13 (1912), p. 293—304.

**) Über die g-adischen Zahlen vgl. *K. Hensel*: Zahlentheorie (Berl. u. Leipz. 1913).

***) Vgl. *Dickson*, a. a. O., p. 202—204, oder *Loewy*s zitiertes Lehrbuch, S. 52—54.

der Form $a_0 + 2a_1 i_1 + 2a_2 i_2 + 2a_3 i_3$, wobei die a_i beliebige Werte eines vollständigen Restsystems modulo 8, z. B. der Reihe 0, 1, ... 7, unabhängig voneinander annehmen können. Addition und Multiplikation sind stets modulo 8 auszuführen, sonst aber in der gewöhnlichen Weise, wonach im besonderen auch jedes Quaternion mit jeder Zahl multiplikativ vertauschbar ist; für die Produkte der Haupteinheiten i_1, i_2, i_3 sind die aus nebenstehender Tabelle hervorgehenden Werte einzusetzen, wobei aber zu beachten ist, daß i_1, i_2, i_3 selbst gar nicht Elemente des Systems sind (für sie würde das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht allgemein gelten).

Werte von $u \cdot v$

$u =$	$v = i_1$	i_2	i_3
i_1	2	i_3	$2i_2$
i_2	$2i_3$	2	i_1
i_3	i_2	$2i_1$	2

Dagegen sei $8i_1 = 8i_2 = 8i_3 = 0$. Für dieses System sind alle Bedingungen außer $R_{9)}$ erfüllt; Nullteiler sind alle und nur die Elemente $a_0 + 2a_1 i_1 + 2a_2 i_2 + 2a_3 i_3$, für die a_0 durch 2 teilbar ist, und zu jedem anderen existiert das eindeutig bestimmte reziproke Element

$$a_0' + 2a_0'^3(2a_2a_3 - a_0a_1)i_1 + 2a_0'^3(2a_3a_1 - a_0a_2)i_2 + 2a_0'^3(2a_1a_2 - a_0a_3)i_3,$$

wo $a_0 a_0' \equiv 1 \pmod 8$. Dagegen ist $R_{9)}$ nicht erfüllt; denn es ist z. B. $2i_1 \cdot 2i_2 = 4i_3$, dagegen $2i_2 \cdot 2i_1 = 0$.

§ 2. Die zerlegbaren Ringe, ihre Primteiler und Primärteiler der Null und die multiplikative Zerlegung ihrer Elemente.

Definition 1: Gegeben sei ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$; ein Nullteiler aus $\mathfrak{R}$, der außer regulären Elementen keinen echten Teiler besitzt, in dem also nur ihm äquivalente und reguläre Elemente enthalten sind, heiße ein Primteiler der Null oder auch kurz ein Primteiler.

Beispiel für R_{360}: Primteiler von R_{360} sind alle Klassen, die entweder durch 2, aber durch keine höhere Potenz von 2 und weder durch 3 noch durch 5 — oder durch 3, aber durch keine höhere Potenz von 3 und weder durch 2 noch durch 5 — oder durch eine beliebige Potenz von 5, aber weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind, also die Klassen

$$2, 14, 22, 26, 34, \ldots; \quad 3, 21, 33, 39, 51, \ldots;$$
$$5, 25, 35, 55, 65, \ldots .$$

Z. B. ist 25 ein *Primteiler* der Null; denn es ist zwar $25 = 5 \cdot 5$, aber 5 ist kein *echter* Teiler von 25, weil auch $5 = 25 \cdot 29$. Die Primteiler jeder der drei Kategorien sind jeweils untereinander äquivalent.

Satz 1: *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring von endlichem Grad, so enthält jeder Nullteiler a aus $\mathfrak{R}$ mindestens einen Primteiler.*

Denn ist a nicht selbst Primteiler, so enthält a wegen der Definition der Primteiler einen echten Teiler a_1, der nicht regulär ist. Ist a_1 Primteiler, so ist der Satz für a zutreffend; im anderen Fall muß ebenso a_1 einen echten, nicht regulären Teiler a_2 enthalten, der nicht nur von a_1, sondern auch von a wesentlich verschieden ist. Setzt man das Verfahren fort, so muß man schließlich, da $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung nur endlich viele wesentlich verschiedene Nullteiler enthält, zu einem in a enthaltenen Primteiler gelangen, w. z. b. w.*).

Satz 2: *Jeder einem Ringe $\mathfrak{R}$ angehörige Nullteiler a, der kein Primteiler ist, aber einen solchen enthält — wie letzteres in Ringen endlichen Grades für alle Nullteiler zutrifft —, läßt sich in ein Produkt $a = a_1 \cdot a_2$ in $\mathfrak{R}$ zerlegen, in dem beide Faktoren a_1 und a_2 von a wesentlich verschieden sind.*

Beweis: p sei ein in a enthaltener Primteiler, so daß etwa $a = a_1 \cdot p$ ist. Ist a_1 nicht durch a teilbar, so ist der Satz bewiesen. Es sei daher $a_1 = a_2 \cdot a$; ferner sei $P \cdot p = O$, wo $P \neq O$ (ein solches Element P muß in $\mathfrak{R}$ existieren, weil p ein Nullteiler von $\mathfrak{R}$ ist). Dann ist sicher P nicht teilbar durch a, weil aus $P = b \cdot a$ folgen würde:

$$P = b \cdot a = b \cdot a_2 \cdot a \cdot p = b \cdot a \cdot p \cdot a_2 \cdot \beta_{a_2, a \cdot p} \text{ (vgl. } R_{9)} \text{ a. S. 144)}$$
$$= P \cdot p \cdot a_2 \cdot \beta_{a_2, a \cdot p} = O \text{ gegen die Voraussetzung.}$$

Nun ist:

$$a = a + P \cdot p = (a_1 + P) \cdot p;$$

hier aber ist sicher $a_1 + P$ von a wesentlich verschieden, weil mit $a_1 + P$ zugleich auch $P = a_1 + P - a_2 \cdot a$ durch a teilbar wäre; der Satz ist also bewiesen.

Beispiel für R_{360}: $a = 40$, $a_1 = 80$, $p = 5$, $a_2 = 2$, $P = 72$. Es ist $40 = 80 \cdot 5$, $80 = 2 \cdot 40$; aus $72 \cdot 5 = 0$ folgt daher: $40 = (80 + 72) \cdot 5 = 152 \cdot 5$, wo 152 ein echter Teiler von 40 ist.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ von endlichem Grade, a ein Nullteiler aus $\mathfrak{R}$, der nicht schon selbst ein Primteiler ist, und es sei nach Satz 2 $a = a_1 \cdot a_2$, wo weder a_1 noch a_2 äquivalent a ist. Ebenso lassen sich dann a_1 und a_2 als Produkte eigentlicher Teiler ($a_1 = a_{11} \cdot a_{12}$, $a_2 = a_{21} \cdot a_{22}$) darstellen, falls weder a_1 noch a_2 ein Primteiler ist. Bei jedem folgenden Schritt des in dieser Weise weiter fortsetzbaren Verfahrens gelangt man so zu einer Reihe von

*) Diese Methode reicht zwar zum Beweis von Satz 1 hin, nicht aber wie bei der Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren zum Beweis der Sätze 2 und 3.

(nicht notwendig verschiedenen) Nullteilern, deren jeder ein echter Teiler eines gewissen Elements der vorhergehenden Reihe ist, falls dieses nicht schon ein Primteiler war. Da $\mathfrak{R}$ nur endlichviele wesentlich verschiedene Nullteiler enthält, so muß das Verfahren schließlich zu lauter Primteilern führen. Bedenkt man noch, daß vermöge $\varepsilon \cdot O = O$, $\varepsilon \neq O$ die Null eines jeden Ringes ein Nullteiler ist, in einem (auch nichtkommutativen) Körper aber ein Produkt nur zugleich mit einem seiner Faktoren verschwindet, so hat man:

Satz 3: *Jeder endliche oder unendliche Ring endlichen Grades enthält eine positive endliche Anzahl wesentlich verschiedener Primteiler der Null; dann und nur dann ist die Null selbst ein Primteiler — und zwar dann der einzige —, wenn der Ring ein (eventuell nichtkommutativer) Körper ist. Jeder Nullteiler eines Ringes von endlichem Grade läßt sich auf mindestens eine Weise als Produkt endlich vieler Primteiler der Null darstellen.*

Beispiel für R_{360}: Eine Zerlegung von 60 in Primteiler der Null ist: $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 25 \cdot 174 = 2 \cdot 25 \cdot 58 \cdot 3$.

Offenbar ist in Ringen von Kongruenzklassen diese Zerlegung in Primteiler der Null sogar bis auf die Reihenfolge *eindeutig*, wenn man äquivalente Primteiler nicht als verschieden ansieht (dabei ist allerdings noch vorauszusetzen, daß überflüssige Faktoren beseitigt sind). In dem geführten Beweis ist jedoch nichts hierüber enthalten und eine solche wichtige Eigenschaft wird denn auch bei den allgemeinsten Ringen gar nicht zu erwarten sein. Daß man in der Tat noch eine besondere Forderung zu stellen hat, will man sich auf Ringe beschränken, bei denen die Zerlegung einer derartigen Eindeutigkeitsbedingung genügt, das läßt sich z. B. mittels des auf S. 148 f. (zum Nachweis der Unabhängigkeit der Ringbedingung R_9)) benutzten Systems von „Quaternionen“ erkennen, wenn man es nur dahin abändert, daß die Multiplikation kommutativ bleibt.

Man betrachte also wieder einen Ring von Elementen der Form $a_0 + 2a_1 i_1 + 2a_2 i_2 + 2a_3 i_3$, wo $a_i = 0, 1, \ldots 7$ und sowohl die Addition wie die Multiplikation modulo 8 auszuführen ist und kommutativ sein soll. Die Produkte der — wieder im Ring selbst nicht vorkommenden — Haupteinheiten i_1, i_2, i_3 sind nach der vorstehenden Tabelle zu bilden;

Werte von $u \cdot v$:

u \ v	i_1	i_2	i_3
i_1	2	i_3	i_2
i_2	i_3	2	i_1
i_3	i_2	i_1	2

es sei wieder $8i_1 = 8i_2 = 8i_3 = 0$. Dann sind $2, 2i_1, 2i_2, 2i_3$ wesentlich verschiedene Primteiler des Ringes; trotzdem ist z. B. $4i_1 = 2 \cdot 2i_1 = 2i_2 \cdot 2i_3$, d. h. man hat zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen von $4i_1$ in Primteiler.

Um daher diejenigen Ringe, für deren Elemente eine gewisse, später näher zu präzisierende *Eindeutigkeit* der Zerlegung in Primteiler der Null besteht, unter den ganz allgemeinen Ringen hervorzuheben, dient die folgende

Definition 2: Ein Ring $\mathfrak{R}$ von endlichem oder unendlich hohem Grad heiße zerlegbar, wenn er außer den Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$ auch noch die folgende Z) erfüllt:

Z) Sind a, b, c Elemente aus $\mathfrak{R}$ und ist $a \cdot b$ durch c teilbar, so läßt sich c auf mindestens eine Weise als Produkt $c = c_1 \cdot c_2$ derart darstellen, daß a durch c_1 und b durch c_2 teilbar ist.

Die Bedingung ist in dieser Weise formuliert, um bei der Definition der zerlegbaren Ringe diejenige der Primteiler der Null nicht voraussetzen zu müssen. Das genaue Analogon der Bedingung Z) wird z. B. von den gewöhnlichen ganzen rationalen Zahlen erfüllt, nicht aber von den ganzen Zahlen jedes beliebigen algebraischen Zahlkörpers, in dem eben in der Tat die Zerlegung in Primfaktoren nicht notwendig eindeutig ist.

Über die Zerlegbarkeit der Ringe endlichen Grades, die in diesem Paragraphen bisher ausschließlich betrachtet wurden, gibt das folgende *hinreichende Kriterium* Aufschluß, das im allgemeinen sehr viel einfacher als die Bedingung Z) nachzuprüfen sein wird:

Satz 4: *Lassen sich in einem Ring $\mathfrak{R}$ von endlichem Grad zu jedem gegebenen Paar wesentlich verschiedener Primteiler der Null aus $\mathfrak{R}$, p_1 und p_2, zwei reguläre Elemente α_1 und α_2 finden, so daß $\alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_2 \cdot p_2$ regulär wird, so ist $\mathfrak{R}$ ein zerlegbarer Ring.*

Da $(\alpha_1 \cdot p_1, \alpha_2 \cdot p_2)$ wieder ein Paar von Primteilern ist, demgegenüber (p_1, p_2) in keiner Weise ausgezeichnet ist, so kann man auch kurz sagen: Ein Ring ist zerlegbar, wenn die Summe je zweier wesentlich verschiedener, passend gewählter Primteiler regulär ist.

Beispiel für den Ring R_{105} der Kongruenzklassen modulo 105: Es ist (3, 5, 7) ein vollständiges System wesentlich verschiedener Primteiler der Null aus R_{105}; da

z. B. $3+5=8$ (regulär), $100+7=2$ (regulär) und $9+49=58$ (regulär) ist, wobei die Äquivalenzen $9 \sim 3$, $100 \sim 5$, $49 \sim 7$ gelten, so ist R_{105} (wie jeder solche Ring von Kongruenzklassen) zerlegbar.

Zum Beweis des Satzes 4 dient wesentlich folgender

Hilfssatz: *Ist $\mathfrak{R}$ ein endlicher Ring, der die Voraussetzung des Satzes 4 erfüllt, so ist ein Produkt $a \cdot b$ aus $\mathfrak{R}$, dessen einer Faktor a genau durch die m-te ($m = 0, 1, 2, \ldots$), aber durch keine höhere Potenz eines bestimmten Primteilers p teilbar ist, während im andern Faktor b überhaupt p nicht enthalten ist, selbst nur durch p^m und keine höhere Potenz von p teilbar.*

Daß mit diesem Satz zugleich auch Satz 4 bewiesen sein wird, daß also die in dem Hilfssatz ausgesprochene Eigenschaft in endlichen Ringen die Zerlegbarkeit, aus der sie ja ohne weiteres folgt, auch umgekehrt nach sich zieht, leuchtet fast unmittelbar ein; der Gedankengang soll hier nur skizziert werden. Das in der Bedingung *Z*) (S. 152) auftretende Element c habe zunächst die Eigenschaft, nicht zwei wesentlich verschiedene Primteiler der Null zu enthalten; dann ist, wenn c im besonderen regulär ist, die Zerlegbarkeitsbedingung sicher erfüllt. Durch vollständige Induktion folgt, wenn man die Eigenschaft des Hilfssatzes als bewiesen betrachtet, das nämliche noch für den Fall, daß c sich als Produkt äquivalenter Primteiler darstellen läßt; man hat hierzu von den Fällen, wo eine der nach Satz 3 möglichen Zerlegungen von c genau $n-1$ ($n = 1, 2, \ldots$) äquivalente Primteiler, keine aber mehr enthält, aufzusteigen zu denjenigen Fällen, in denen mindestens *eine* solche Zerlegung genau n äquivalente Primteiler besitzt. Enthält schließlich c zwei oder mehr wesentlich verschiedene Primteiler, so benutze man wieder eine Zerlegung von c nach Satz 3; auf Grund der vorausgesetzten Eigenschaft des Hilfssatzes folgt dann unmittelbar aus dem Erfülltsein der Zerlegbarkeitsbedingung für jedes in c vorkommende Produkt äquivalenter Primteiler, daß auch c selbst jene Bedingung befriedigt.

Dem jetzt zu führenden Beweis des Hilfssatzes sei noch folgende Bemerkung vorangeschickt: Das in ihm vorkommende Element b kann ersichtlich als so gewählt vorausgesetzt werden, daß für keinen *echten* Teiler b_0 von b sich $a \cdot b_0$ von $a \cdot b$ nur unwesentlich unterscheidet (was bei Nullteilern sehr wohl möglich ist; z. B. für R_{105}: $a = 15$, $b = 35$, $b_0 = 7$); denn in diesem Fall genügt es, von vornherein $a \cdot b_0$ zu betrachten, da der zu beweisende Satz, wenn er für dieses Produkt zutrifft, für $a \cdot b$

a fortiori richtig ist. Ferner sei bemerkt, daß offenbar, falls α ein reguläres Element bedeutet, $\alpha \cdot b$ und $b \cdot \alpha$ nur durch die Teiler von b teilbar sind, weil ja von $\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot b$ bzw. $b \cdot \alpha \cdot \alpha^{-1}$ das nämliche gilt.

Der Beweis des Hilfssatzes selbst ist jetzt durch vollständige Induktion zu führen. Der Satz ist nämlich ersichtlich stets richtig für alle Produkte $a \cdot b$, die regulär sind, oder zwar *einen* Nullteiler, aber keinen von ihm wesentlich verschiedenen enthalten. Er sei bereits bewiesen für alle Produkte $a \cdot b$, die durch weniger als n wesentlich verschiedene Nullteiler teilbar sind. Dann ist zwar sehr wohl denkbar, daß überhaupt kein Produkt $a \cdot b$ aus $\mathfrak{R}$ genau n wesentlich verschiedene Nullteiler enthält; jedenfalls aber muß es — falls in dem Ring überhaupt n wesentlich verschiedene Nullteiler vorkommen — Produkte $a \cdot b$ mit n oder mehr wesentlich verschiedenen nicht regulären Teilern derart geben, daß jedes Element aus $\mathfrak{R}$, das weniger wesentlich verschiedene Teiler als $a \cdot b$ besitzt, höchstens $n-1$ solche enthält. Angenommen nun, ein Produkt $a \cdot b$ von jener letztgenannten Art wäre durch p_1^{m+1} teilbar, während in a nur p_1^m, in b der Primteiler p_1 überhaupt nicht enthalten wäre; dann sei p_2 ein beliebiger in b enthaltener, also von p_1 wesentlich verschiedener Primteiler (für reguläres b wäre ja die Annahme ohne weiteres absurd), und es seien α_1 und α_2 gemäß der Voraussetzung des Satzes 4 solche reguläre Elemente aus $\mathfrak{R}$, daß $\alpha_1 \cdot p_1 + \alpha_2 \cdot p_2$ regulär ist. Ferner sei $b = b_0 \cdot p_2$, wo b nicht auch in b_0 enthalten sei; nach dem beim Beweis des Satzes 2 (S. 150) eingeschlagenen Verfahren läßt sich ein solches Element b_0 stets ermitteln. Dann ist

$$b + b_0 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot p_1 = c = b_0 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot (\alpha_2 \cdot p_2 + \alpha_1 \cdot p_1) = b_0 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \eta,$$

wo η ebenso wie α_2^{-1} nach Voraussetzung regulär, c also nicht durch p_1 teilbar ist. Es wäre aber

$$a \cdot c = a \cdot b + a \cdot b_0 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \alpha_1 \cdot p_1 = a \cdot b_0 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \eta$$

durch p_1^{m+1} teilbar, falls $a \cdot b$ es wäre; denn a ist ja durch p_1^m teilbar, also wäre in jedem der beiden Summanden p_1^{m+1} enthalten. Andererseits ist a nach Voraussetzung nur durch p_1^m, c nach dem letzten Resultat überhaupt nicht durch p_1 teilbar, und da $a \cdot c$ weniger wesentlich verschiedene Teiler enthält als $a \cdot b$ (weil nämlich alle Teiler von $a \cdot b_0$ in $a \cdot b$, nicht aber z. B. $a \cdot b$ in $a \cdot b_0$ enthalten ist), so war für $a \cdot c$ der zu beweisende Satz schon als gültig angenommen. Der hiermit erzielte Widerspruch erweist den Satz 4 als richtig.

Da für einen Ring von endlichem Grad, der nur zwei wesentlich verschiedene Primteiler p_1 und p_2 enthält*), sicher $p_1 + p_2 = \eta$ regulär ist, so folgt als Korollar des letzten Satzes:

Satz 5: *Ein Ring endlichen Grades, der nur zwei wesentlich verschiedene Primteiler enthält, ist stets zerlegbar.*

Bisher sind in diesem Paragraphen ausschließlich Ringe von endlichem Grade betrachtet und für sie die Existenz der Primteiler der Null und einige Eigenschaften derselben bewiesen worden. Offenbar sind die hierbei, besonders beim Existenzbeweis, benutzten Methoden auf *Ringe unendlich hohen Grades* nicht ausdehnbar; daß aber in Ringen der letzteren Art wirklich *Primteiler der Null überhaupt nicht notwendig existieren*, zeigt das folgende Beispiel:

Jedes Element A des zu betrachtenden Ringes $\mathfrak{R}$ sei ein Komplex von abzählbar unendlich vielen, in wohlgeordneter Reihe auftretenden reellen Zahlen a_i: $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$; die Zahlen a_i können dabei beliebig gewählt werden, nur soll ihre Folge für jedes Element A periodisch sein, d. h. es soll zu A eine natürliche Zahl m (und also eine eindeutig bestimmte *kleinste* solche Zahl, die *Periodenlänge*) existieren derart, daß

$$A = (a_1, a_2, \ldots a_m, a_1, a_2, \ldots a_m, a_1, \ldots)$$

ist. Addition und Multiplikation seien definiert durch

$$(a_1, a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 \overset{*}{+} b_1, a_2 \overset{*}{+} b_2, \ldots)$$
$$(a_1, a_2, \ldots) \cdot (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 \overset{*}{\cdot} b_1, a_2 \overset{*}{\cdot} b_2, \ldots),$$

wobei $\overset{*}{+}$ und $\overset{*}{\cdot}$ die Zeichen für die gewöhnliche Addition und Multiplikation der reellen Zahlen sind. Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier Elemente mit den Periodenlängen m und n sind ersichtlich wieder Elemente aus $\mathfrak{R}$, deren Periodenlängen das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n oder Teiler desselben sein werden. Alle Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$ und auch die Zerlegbarkeitsbedingung Z) sind erfüllt; Nullelement ist $(0, 0, 0, \ldots)$, Einheitselement $(1, 1, 1, \ldots)$. Nullteiler sind alle und nur die Elemente, in deren Periode wenigstens *eine* Null vorkommt; denn es ist z. B.

*) Ein Ring mit nur zwei Primteilern kann sehr wohl auch unendlich hohen Grad besitzen, da möglicherweise alle Potenzen eines Primteilers untereinander wesentlich verschieden sind (vgl. S. 157 ff.).

$$(a_1, \dots a_{k-1}, 0, a_{k+1}, \dots a_m, a_1, \dots) \cdot \underbrace{(\overbrace{0, 0, \dots 0}^{k-1 \text{ Glieder}}, 1, \overbrace{0, \dots 0}^{m-k \text{ Glieder}}, 0, \dots)}_{\text{Periode}} = (0, 0, 0, \dots).$$

Trotzdem enthält dieser Ring keinen Primteiler der Null; denn ist $A = (a_1, \dots a_m, a_1, \dots)$ ein ganz beliebiger Nullteiler, so ist

$$A = (\underbrace{a_1, a_2, \dots a_m, \overbrace{1, 1, \dots 1}^{m \text{ Glieder}}}_{\text{Periode}}, a_1, a_2, \dots) \cdot (\underbrace{\overbrace{1, 1, \dots 1}^{m \text{ Glieder}}, a_1, a_2, \dots a_m}_{\text{Periode}}, 1, 1, \dots),$$

und hier ist sowohl der erste wie auch der zweite Faktor wesentlich verschieden von A, d. h. A ist gewiß kein Primteiler.

Um daher auch bei Ringen unendlich hohen Grades das Vorhandensein von Primteilern der Null benutzen zu können, auf das sich alles Nachfolgende wesentlich stützen wird, und um zugleich die hier notwendigen unendlichen Prozesse vorwegzunehmen, setze ich für die weiter zu betrachtenden zerlegbaren Ringe *unendlich hohen Grades*, aber auch nur für diese, noch das Erfülltsein der folgenden Bedingung voraus:

$Z_{\infty)}$ *In einem zerlegbaren Ring unendlich hohen Grades gibt es zu jedem vorgegebenen Nullteiler einen in ihm enthaltenen Primteiler der Null p, und für jeden solchen Primteiler läßt sich die Null darstellen in der Form $O = P \cdot \bar{P}$, wo $\bar{P}$ durch den Primteiler p nicht teilbar, P aber umgekehrt nur durch p und keinen von p wesentlich verschiedenen Primteiler teilbar ist.*

In einem solchen Ring ist dann möglicherweise ein Element darstellbar als Produkt einer Menge von Primteilern der Null, welche eine beliebig hohe transfinite Mächtigkeit besitzen kann; zur Veranschaulichung wird ein Beispiel eines derartigen Ringes am Schluß dieses Paragraphen gegeben werden.

Von nun an sollen in dieser Arbeit ausschließlich zerlegbare Ringe, die also den Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$ a. S. 143 f. und Z) a. S. 152 genügen, betrachtet werden; unter „Ring" schlechthin ist stets ein zerlegbarer zu verstehen, und zwar im Fall unendlich hohen Grades stets ein solcher zerlegbarer Ring, der auch noch der Bedingung $Z_{\infty)}$ genügt.

p sei ein beliebiger Primteiler der Null im Ring $\mathfrak{R}$. Besitzt $\mathfrak{R}$ endlichen Grad, so können unter den Potenzen $p, p^2, p^3, \dots$, die sämtlich Nullteiler sind, nicht unendlich viele wesentlich verschiedene sein; aber

auch bei Ringen unendlich hohen Grades kann und wird es häufig vorkommen, daß zwei dieser Potenzen einander äquivalent sind. Es sei p^n die niedrigste Potenz, die sich von einer früheren, etwa p^m $(m < n)$, nur unwesentlich unterscheide; da p^{n-1} wegen $m < n$ sicher durch p^m teilbar ist, so ist dann $p^n \backsim p^{n-1}$, d. h. $m = n - 1$. Ist $p^m = a \cdot p^{m+1}$, so ist auch $p^{m+m'} = a \cdot p^{m+m'+1}$ $(m' = 1, 2, \ldots)$, so daß folgt:

Satz 6: *Sind — was insbesondere bei Ringen endlichen Grades stets der Fall ist — die Potenzen $p, p^2, \ldots$ eines beliebigen Primteilers p im Ringe $\mathfrak{R}$ nicht sämtlich untereinander wesentlich verschieden, so gibt es eine natürliche Zahl m derart, daß die Potenzen $p, p^2, \ldots p^m$ alle untereinander wesentlich verschieden, alle folgenden Potenzen $p^{m+1}, p^{m+2}, \ldots$ aber sämtlich zueinander und zu p^m äquivalent sind.* Dies möge bezeichnet werden durch die Ausdrucksweise: Der Primteiler p steigt bis zum Exponenten m.

Es ist nun vor allem zu zeigen, daß es auch zerlegbare Ringe, also Ringe, die nicht nur die Bedingung Z), sondern auch $Z_{\infty})$ erfüllen, von solcher Art gibt, daß sie Primteiler der Null p enthalten, für die *alle* Potenzen $p, p^2, p^3, \ldots$ untereinander wesentlich verschieden sind; ein solcher Ring ist dann sicher auch von unendlich hohem Grad. Auf Ringe dieser Art ist man meines Wissens bisher noch nirgends geführt worden; ihre Existenz ist aber auch aus folgender Erwägung heraus merkwürdig: Ist p ein Primteiler der Null, dessen Potenzen sämtlich untereinander wesentlich verschieden sind, und P ein nach $Z_{\infty})$ existierender Nullteiler von der Art, daß $P \cdot \overline{P} = O$ ist, wo P, aber nicht $\overline{P}$ durch den Primteiler p teilbar ist, so kann man wiederum nach der beim Beweis des Satzes 2 auf S. 150 eingeschlagenen Methode eine Zerlegung $P = p \cdot P'$ finden, für die P und P' wesentlich verschieden sind; da hier offenbar P' durch *jede* Potenz p^m von p teilbar ist, liegt es nahe, nach Analogie mengentheoretischer Sätze zu erwarten, daß P' auch durch $p \cdot P' = P$ teilbar sein müsse, womit die Nichtexistenz derartiger Ringe erwiesen wäre. Der innere Grund des Unterschieds liegt darin, daß das Analogon zum Axiom der Vereinigungsmenge der Mengenlehre, das die Existenz eines kleinsten gemeinsamen Vielfachen gegebener Nullteiler sichern würde, hier nicht existiert.

Um nun einen Ring von der gewünschten Eigenschaft zu bilden und anschaulich zu machen, gehe ich von einem geometrischen Bild aus. Man denke sich den Punkten einer Strecke von der Länge 2 die Werte

von -1 bis $+1$ als Abszissen zugeordnet und markiere unter ihnen besonders die Punkte mit den Abszissen $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \ldots \pm\frac{1}{2^\nu}, \ldots$; ferner bezeichne man den Punkt von der Abszisse -1 mit E oder p^0, den Punkt $-\frac{1}{2}$ mit p, den Punkt $-\frac{1}{4}$ mit $p^2, \ldots$ den Punkt $-\frac{1}{2^\nu}$ mit p^ν, andererseits den Punkt $+1$ mit N oder $\frac{N}{\overline{\overline{p^0}}}$, den Punkt $+\frac{1}{2}$ mit $\frac{N}{\overline{\overline{p}}}$, den Punkt $+\frac{1}{4}$ mit $\frac{N}{\overline{\overline{p^2}}}, \ldots$ den Punkt $+\frac{1}{2^\nu}$ mit $\frac{N}{\overline{\overline{p^\nu}}}$. Schließlich definiere man zwischen diesen Punkten oder Symbolen eine Multiplikation durch die Festsetzungen

$$p^\mu \cdot p^\nu = p^{\mu+\nu}, \quad \frac{N}{\overline{\overline{p^\mu}}} \cdot \frac{N}{\overline{\overline{p^\nu}}} = N, \quad \frac{N}{\overline{\overline{p^\mu}}} \cdot p^\nu = p^\nu \cdot \frac{N}{\overline{\overline{p^\mu}}} = \frac{N}{\overline{\overline{p^{\mu-\nu}}}} \text{ für } \mu > \nu,$$

$$\frac{N}{\overline{\overline{p^\mu}}} \cdot p^\nu = p^\nu \cdot \frac{N}{\overline{\overline{p^\mu}}} = N \text{ für } \mu \leqq \nu.$$

Diese Formeln besagen, es solle, je nachdem der Multiplikator von der Form p^ν oder von der Form $\frac{N}{\overline{\overline{p^\nu}}}$ ist, vom Multiplikanden aus um ν oder um unendlich viele Punkte nach der positiven Richtung fortgeschritten werden, mit der Maßgabe, daß die Multiplikation kommutativ ist und der Punkt N nicht überschritten werden darf.

Man betrachte nun E als das universale Einheitselement und N als das Nullelement eines Ringes $\mathfrak{R}$, in dem alle natürlichen Multipla von E untereinander verschieden und regulär seien, und der alle Symbole der Form $\frac{\alpha_1 \cdot P_1 + \alpha_2 \cdot P_2 + \cdots + \alpha_m \cdot P_m}{\beta_0 + \beta_1 \cdot Q_1 + \beta_2 \cdot Q_2 + \cdots + \beta_n \cdot Q_n}$ als Elemente enthalte, wobei die α_i und β_i beliebige rationale Multipla von E mit der einzigen Beschränkung $\beta_0 \neq N$, die P_i und Q_i aber beliebige Elemente der Doppelreihe $E, p, p^2, p^3, \ldots N, \frac{N}{\overline{\overline{p}}}, \frac{N}{\overline{\overline{p^2}}}, \frac{N}{\overline{\overline{p^3}}}, \ldots$ seien. Gleichheit, Addition und Multiplikation mögen formal ganz wie bei rationalen Funktionen erklärt werden, nur daß Produkte der P_i und Q_i nach den vorher gegebenen Regeln zu bilden sind. Dann sind offenbar alle Bedingungen $R_{1)}$ bis $R_{10)}$, $Z)$ und $Z_{\infty)}$ erfüllt; Nullteiler sind alle und nur die Elemente, in deren „Zähler" (nach Zusammenfassung gleichartiger Glieder) alle P_i von E verschieden sind, Primteiler der Null insbesondere die zu p äquivalenten Elemente, und da der Ring also nicht zwei wesentlich verschiedene Primteiler enthält, wird $Z_{\infty)}$ durch $P = N$, $\overline{P} \backsim E$ erfüllt. In diesem Ring sind alle Potenzen von p untereinander wesentlich verschieden und hat z. B. jeder Nullteiler der Form $\frac{N}{\overline{\overline{p^\nu}}}$ $(\nu > 0)$ die Eigenschaft, zwar durch alle Potenzen

$p, p^2, p^3, \ldots$ des Primteilers p teilbar zu sein, aber sich wesentlich zu ändern bei der Multiplikation mit p.

Um daher die Untersuchung im folgenden ganz allgemein führen zu können, will ich auch für einen Ring, in dem *alle* Potenzen $p, p^2, \ldots$ untereinander wesentlich verschieden sind, eine Bezeichnung analog der im anderen Fall verwendeten einführen. Es sei nämlich in einem solchen Ring, der natürlich stets von unendlich hohem Grad ist, $O = P \cdot \overline{P}$ eine Zerlegung der Null im Sinn von $Z_{\infty)}$, bei welcher P den Primteiler p enthält. Dann ist auch $P \cdot p$ in O und daher, weil $\overline{P}$ durch p nicht teilbar ist, in P enthalten, d. h. es ist $P \backsim P \cdot p \backsim P \cdot p^2 \backsim \cdots$; P spielt offenbar für den Primteiler p genau die nämliche Rolle wie vorher p^m. Ich will daher auch in diesem Fall, wo alle Potenzen von p untereinander wesentlich verschieden sind, den gemäß $Z_{\infty)}$ bis auf äquivalente Elemente eindeutig bestimmten, allein durch den Primteiler p teilbaren Nullteiler P als eine symbolische Potenz p^m schreiben und m den Exponenten nennen, bis zu dem p steigt; m ist aber in diesem Fall lediglich als ein Symbol zu betrachten, das nur durch die Festsetzung $p^m = P$ definiert ist (und das man etwa, wenn man will, identifizieren kann mit der Ordinalzahl der Menge aller wesentlich verschiedenen Teiler von P, falls diese so angeordnet ist, daß jedes folgende Element in ihr durch jedes voraufgehende teilbar ist; also im Fall des letzten Beispiels $m = \omega + {}^*\omega$).

In den beiden Fällen eines endlichen und eines symbolischen m nenne ich den bis auf äquivalente Elemente eindeutig bestimmten Nullteiler $P = p^m$ einen zum Primteiler p gehörigen primären Teiler der Null oder kurz Primärteiler. Steigt ein Primteiler nur bis zum Exponenten 1, so ist er zugleich Primärteiler. Dann und nur dann ist die Null selbst Primärteiler (und zwar dann der einzige), wenn der Ring nicht zwei wesentlich verschiedene Primteiler enthält. Die Primärteiler können auch charakterisiert werden als Nullteiler, die nur einen einzigen Primteiler enthalten und sich nur unwesentlich ändern, wenn man sie mit beliebigen ihrer Teiler multipliziert.

Beispiel für R_{360}: Der Primteiler 2 steigt in R_{360} bis zum Exponenten 3, der Primteiler 3 bis zum Exponenten 2, der Primteiler 5 bis zum Exponenten 1; z. B. sind 2, 4, 8 wesentlich verschieden, aber es ist $8 \backsim 16$ wegen $16 = 2 \cdot 8$, $8 = 23 \cdot 16$.

Die Primärteiler von R_{360} sind: 8, 16, 32, 56, 64, 88, ...; 9, 27, 63, 81, 99, ...; 5, 25, 35, 55, 65, ..., und zwar gehören diejenigen der ersten Reihe zum Primteiler 2, die der zweiten zu 3, die der dritten zu 5 und die Primärteiler jeder Reihe sind untereinander äquivalent. — Dagegen steigen z. B. in Ringen g-adischer Zahlen alle Primteiler bis zum Exponenten 1.

Offenbar gilt:

Satz 7: *Ein Ring, dessen sämtliche Primteiler nur bis zu endlichen Exponenten steigen, ist dann und nur dann von unendlich hohem Grad, wenn er unendlich viele wesentlich verschiedene Primteiler enthält.*

Nunmehr sind alle Materialien zum Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegung vollständig entwickelt:

Satz 8: *In einem (zerlegbaren) Ring ist die Zerlegung eines beliebigen Nullteilers, insbesondere also der Null selbst, in Primteiler der Null bis auf reguläre Faktoren eindeutig, wenn man äquivalente Nullteiler nicht als verschieden betrachtet.*

Was zunächst den *Sinn* dieses Satzes betrifft, auf den etwas näher einzugehen erforderlich ist, so ist er für Ringe endlichen Grades klar, ebenso auch in Ringen von unendlich hohem Grad in bezug auf diejenigen Primteiler, die in dem zu untersuchenden Nullteiler nur in einer bestimmten endlichen Potenz enthalten sind; nur das eine ist — bei allen Ringen endlichen Grades wie auch in Ringen unendlich hohen Grades bei solchen Primteilern p, die nur bis zu endlichen Exponenten steigen — zu beachten, daß in irgend zwei Zerlegungen des zu untersuchenden Nullteilers die Anzahlen α und β, in denen ein Primteiler p einschließlich der ihm äquivalenten beiderseits vorkommt, natürlich nur dann übereinzustimmen brauchen, wenn α oder β kleiner ist als der Exponent m, bis zu dem der Primteiler p steigt; denn ist $\alpha \geqq m$ und $\beta \geqq m$, so ist ja nach der Definition von m *stets* $p^\alpha \backsim p^\beta$. (Z. B. ist so in R_{360}: $32 = 2^5 = 23 \cdot 2^6$.) Bei Ringen unendlich hohen Grades aber, wo eine nicht allgemein als definiert vorauszusetzende Zerlegung in unendlich viele Faktoren in Frage kommen kann, ist die Behauptung des Satzes diese: Sind irgend zwei Zerlegungen eines Nullteilers A in je endlich viele Faktoren gegeben, und ist ein Primteiler p in einem Faktor der einen Zerlegung enthalten, so ist auch mindestens ein Faktor der andern durch p teilbar; sind insbesondere die in den Zerlegungen von A enthaltenen zu p äquivalenten Elemente zu je einem, P bzw. P', zusammengefaßt, so daß $A = P \cdot \overline{P} = P' \cdot \overline{P'}$

ist, wobei $\overline{P}$ und $\overline{P'}$ nicht durch p, P und P' aber nur durch p und keinen davon wesentlich verschiedenen Primteiler teilbar sind, so ist stets $P \frown P'$.

Der Beweis des Satzes ist nunmehr ganz trivial. Es seien nämlich

$$A = a_1 \cdot a_2 \cdots a_m = b_1 \cdot b_2 \cdots b_n$$

irgend zwei Zerlegungen von A in endlichviele Faktoren, und auf der linken Seite sei der Primteiler p in einem der a_i enthalten. Da ein Primteiler nur Nullteiler enthält, die ihm selbst äquivalent sind, so folgt aus der Zerlegbarkeitsbedingung Z) durch sukzessive Anwendung, daß, falls keiner der Faktoren b_i den Primteiler p enthielte, auch A nicht durch p teilbar wäre; da dies der Voraussetzung widerspricht, ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Ferner seien jetzt wie zu Ende des vorigen Absatzes P und P' die beiderseits aus allen und nur den zu p äquivalenten Nullteilern zusammengesetzten Elemente, so daß $A = P \cdot \overline{P} = P' \cdot \overline{P'}$ ist; steigt p nur bis zu einem endlichen Exponenten oder ist p nur in endlicher Potenz in A enthalten, so läßt sich die Zerlegung von A durch Umstellung der Faktoren nach Satz 3 des § 1 auf S. 145 offenbar immer auf diese Form bringen. Dann ist P in $P' \cdot \overline{P'}$ und also, da $\overline{P'}$ den Primteiler p nicht enthält, nach Z) in P' enthalten, ebenso aber auch umgekehrt P' in P, d. h. es ist $P \frown P'$, w. z. b. w..

Zum Abschluß dieses Paragraphen soll als Beispiel ein Ring $\mathfrak{R}$ angegeben werden, für den *die Menge aller wesentlich verschiedenen Primteiler der Null nicht nur unendlich, sondern sogar von der Mächtigkeit des Kontinuums ist.* Die Elemente von $\mathfrak{R}$ seien Einheitsstrecken einschließlich ihrer Enden, deren Punkte einander umkehrbar eindeutig und (etwa in der Richtung von links nach rechts) ähnlich zugeordnet seien. Von der durch jede Einheitsstrecke gebildeten Punktmenge sei eine völlig willkürliche Teilmenge von Punkten besonders markiert, etwa durch Bezeichnung der Punkte mit je einer 0; zur Unterscheidung werde allen Punkten jeder Einheitsstrecke, die nicht in dieser Weise markiert sind, eine 1 beigeschrieben, und der Kürze wegen schlechthin von Punkten 0 und Punkten 1 gesprochen. Der Ring $\mathfrak{R}$ werde nun gebildet von allen Einheitsstrecken mit *allen möglichen* verschiedenen solchen Markierungen, er entsteht also durch Belegung einer kontinuierlichen Menge mit den Symbolen 0, 1; unter den Elementen von $\mathfrak{R}$ befindet sich demnach auch die Strecke N, deren Punkte sämtlich mit 0 markiert sind, und die

Strecke E, die lauter Punkte 1 enthält. Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier Strecken sollen dadurch entstehen, daß je zwei einander in der eingangs erwähnten Art zugeordnete Punkte auf die sogleich zu definierende Weise addiert, subtrahiert und multipliziert werden und als Summe, Differenz und Produkt die durch die entstehenden Markierungen gekennzeichneten Strecken betrachtet werden. Für einander entsprechende Punkte gelten Operationsregeln wie in der gewöhnlichen Arithmetik, nur daß die Addition modulo 2 genommen wird, also:

$$1+1=0+0=0,\ 1+0=0+1=1;$$
$$1\cdot 1=1;\ 1\cdot 0=0\cdot 1=0\cdot 0=0.$$

Hiernach ist N das Nullelement, E das Einheitselement von $\mathfrak{R}$ und für jede Strecke A ist stets $A=-A$. Nullteiler sind alle und nur die Strecken, die *wenigstens einen* Punkt 0 enthalten; denn ist für eine solche Strecke A M die Menge aller Punkte 0, so steht jede Strecke B, bei der mindestens die Komplementärmenge von M ausschließlich aus Punkten 0 besteht, zu A in der Beziehung $A\cdot B=N$. Primteiler der Null sind alle und nur die Strecken, die *genau einen* Punkt 0 enthalten; sie sind gleichzeitig die Primärteiler des Ringes, da offenbar jeder Primteiler hier nur bis zum Exponenten 1 steigt. Jede Strecke von $\mathfrak{R}$ ist ersichtlich eindeutig als Produkt von endlich oder auch — wenn man in einleuchtender Weise die hier vorkommenden harmlosen unendlichen Produkte zuläßt — unendlich vielen solchen Primteilern darstellbar.

§ 3. Die normierten Primärteiler und die normalen Primteiler.

Unter allen zu einem Primteiler p oder zu einem Primärteiler P eines Ringes äquivalenten Elementen war in der bisherigen Betrachtung keines vor einem anderen ausgezeichnet; diese Gleichberechtigung soll jetzt zerstört und damit die Struktur eines Ringes noch anschaulicher übersehbar gemacht werden.

Zunächst sei P' ein zum Primteiler p gehöriger Primärteiler und $P'\cdot\overline{P'}=O$, wo $\overline{P'}$ durch p nicht teilbar sei. Nach einer auf S. 159 unten gemachten Bemerkung ist dann $P'\cdot P'$ ein zu P' äquivalenter Primärteiler, der vermöge

$$P'\cdot P'=P'\cdot P'+P'\cdot\overline{P'}=P'\cdot(P'+\overline{P'})$$

sich in der Form $P'\cdot P'=P'\cdot\alpha$ darstellt, wo $\alpha=P'+\overline{P'}$ regulär ist; denn α

kann weder durch p (wegen $\overline{P'} = \alpha - P'$) noch durch einen von p wesentlich verschiedenen, also in $\overline{P'}$ enthaltenen Primteiler (wegen $P' = \alpha - \overline{P'}$) teilbar sein. Setzt man $P' \cdot \alpha^{-1} = P$, so folgt $P' \cdot P = P' \cdot \varepsilon = P'$; ich will zeigen, daß der zu P' äquivalente Primärteiler P durch besondere, von der Wahl von P' unabhängige Eigenschaften ausgezeichnet ist.

$P'' = a \cdot P' \cdot b$ sei ein beliebiges zu P' äquivalentes Element; dann läßt sich mittels Anwendung von $R_{9)}$ und eventuell des oben benutzten Verfahrens der Addition von $O = P' \cdot \overline{P'}$ offenbar P'' auf jede der Formen $P' \cdot \beta$ oder $\gamma \cdot P'$ bringen, wo β und γ regulär sind. Zunächst folgt dann, wenn P wieder das im vorigen Absatz definierte Element bedeutet, $\gamma \cdot P' \cdot P = \gamma \cdot P'$, also $P'' \cdot P = P''$, d. h. P spielt in bezug auf die zu P' äquivalenten Elemente die Rolle eines rechtshändigen Einheitselements; ferner ist

$$P' \cdot \beta \cdot \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot P = P \text{ oder } P'' \cdot (\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot P) = P,$$

d. h. der zu P' äquivalente Primärteiler $\beta^{-1} \cdot \alpha^{-1} \cdot P$ ist zu P'' reziprok in bezug auf P als Einheitselement. Da auch das Produkt zweier zu P' äquivalenter Primärteiler wieder ein solcher ist, so bilden alle diese äquivalenten Elemente nach der Definition auf S. 142 in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe. Ist ferner A ein *beliebiges* durch P teilbares Element: $A = a \cdot P$, so ist offenbar auch $A \cdot P = A$. Setzt man noch fest:

Definition 1: Jedes Ringelement a, das der Beziehung $a \cdot a = a$ genügt, soll als normiert bezeichnet werden, so hat man:

Satz 1: *Alle zu irgendeinem primären Nullteiler äquivalenten Elemente bilden in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe, es gibt also unter ihnen insbesondere ein einziges normiertes Element P, den zum Primteiler p gehörigen normierten Primärteiler, der das neutrale Element der Gruppe ist. Jeder normierte Primärteiler ist allgemeiner auch ein Einheitselement für alle durch ihn teilbaren Elemente. Sind A, B, C irgend drei zu P äquivalente Primärteiler, so folgt aus $A \cdot B = A \cdot C$ stets $B = C$ und die Gleichungen $A \cdot X = B$ bzw. $Y \cdot A = B$ haben je eine einzige Lösung X bzw. Y unter den zu P äquivalenten Elementen.*

Die letzten Behauptungen dieses Satzes folgen einfach aus der Gruppeneigenschaft; ist z. B. $A = P \cdot \alpha$, $B = P \cdot \beta$, so ist $X = \alpha^{-1} \cdot P \cdot \beta$ die zu P äquivalente Lösung der Gleichung $A \cdot X = B$, welche natürlich auch noch andere, aber von P wesentlich verschiedene Lösungen besitzt.

Beispiel für R_{360}: Die normierten Primärteiler sind hier die folgenden: 136, 81, 145.

Mittels der letzten Ergebnisse ist es leicht, den folgenden Satz abzuleiten, der eine teilweise Umkehrung des Satzes 4 von § 2 auf S. 152 darstellt:

Satz 2: *Notwendige Bedingung für die Zerlegbarkeit eines kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ ist, daß die Summe irgend zweier wesentlich verschiedener normierter Primärteiler der Null stets ein reguläres Element darstellt; nur dann braucht diese Bedingung nicht erfüllt zu sein, wenn das Element $\varepsilon + \varepsilon$ aus $\mathfrak{R}$ ein Nullteiler ist.*

Zum Verständnis dieses Satzes ist zu bemerken, daß bei der Definition und dem Existenzbeweis der Primärteiler in Ringen endlichen Grades die Zerlegbarkeit nicht benutzt worden ist; bei Ringen unendlich hohen Grades ist natürlich die Bedingung $Z_{\infty)}$ als erfüllt vorauszusetzen, da mittels ihrer die Primärteiler erst definiert wurden.

Beispiel für den Ring der Kongruenzklassen modulo 315: Hier sind 36, 190, 91 die normierten Primärteiler und es ist:

$36 + 190 = 226$ (regulär), $36 + 91 = 127$ (regulär), $91 + 190 = 281$ (regulär).

Beweis: $\mathfrak{R}$ sei ein zerlegbarer Ring, in dem die Multiplikation kommutativ und das Element $\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ regulär sei. Zunächst kann dann die Summe zweier verschiedener normierter Primärteiler $P = p^m$ und $Q = q^n$ weder p noch q enthalten. Enthält $\mathfrak{R}$ überhaupt nur zwei wesentlich verschiedene Primteiler, so ist daher der Satz richtig. Im anderen Fall ist:

$$(p^m + q^n) \cdot (p^m + q^n) = p^m \cdot p^m + q^n \cdot q^n + 2\,(p^m \cdot q^n)$$

oder, da p^m und q^n normiert sind:

$$(p^m + q^n) \cdot (p^m + q^n - \varepsilon) = 2\varepsilon \cdot p^m \cdot q^n.$$

Enthielte nun $p^m + q^n$ einen von p und q wesentlich verschiedenen Primteiler, so müßte dieser auch in $2\varepsilon \cdot p^m \cdot q^n$ enthalten sein, was ausgeschlossen ist, da $\mathfrak{R}$ zerlegbar und 2ε regulär sein sollte; Satz 2 ist also als richtig erwiesen.

Daß aber die für den Fall, wo 2ε ein Nullteiler ist, ausgesprochene Ausnahme nicht etwa auf der Besonderheit des Beweisverfahrens beruht, vielmehr in der Art der Bedingung notwendig gelegen ist, zeigt z. B. jeder Ring von Kongruenzklassen für eine beliebige natürliche gerade Zahl g als Modul, die nur außer 2 noch mindestens zwei weitere gewöhnliche Primzahlen enthält. Offenbar gehört nämlich zu jeder in g enthaltenen Primzahl eine Serie

äquivalenter Primteiler der Null und umgekehrt; 2 und die äquivalenten Klassen bilden eine solche, zum Faktor 2 gehörige Serie, während alle anderen Primteiler wie auch ihre zugehörigen Primärteiler ungerade sind. Der Ring ist kommutativ und zerlegbar; trotzdem ist offenbar die Summe aus irgend zwei beliebigen (insbesondere also auch normierten) Primärteilern, die zu verschiedenen ungeraden Primfaktoren von g gehören, stets durch den Primteiler 2 teilbar. Z. B. sind 81 und 145 die zu 3 und 5 gehörigen normierten Primärteiler von R_{360} und es ist $81+145=226$ äquivalent dem Primteiler 2.

Ist ein Primteiler der Null in einem Ring $\mathfrak{R}$ zugleich Primärteiler, so kann man ihn nach dem vorher angegebenen Verfahren normieren und dann von einem normierten Primteiler sprechen. Vergleicht man alsdann den Satz 4 des § 2 auf S. 152 und den hier soeben bewiesenen Satz, so ergibt sich:

Satz 3: *Ein kommutativer Ring von endlichem Grad, dessen Primteiler sämtlich nur bis zum Exponenten* 1 *steigen und in dem* $\varepsilon+\varepsilon$ *ein reguläres Element ist, ist dann und nur dann zerlegbar, wenn die Summe irgend zweier verschiedener normierter Primteiler stets regulär ist.*

Solche Ringe sind z. B. jeder Ring von Kongruenzklassen für eine beliebige ungerade, kein Quadrat enthaltende zusammengesetzte Zahl als Modul oder jeder Ring rationaler g-adischer Zahlen, wobei g eine beliebige, wenigstens zwei verschiedene Primzahlen enthaltende natürliche Zahl bedeutet.

Nachdem jetzt in jeder Serie äquivalenter *Primärteiler* ein besonderer ausgezeichnet worden ist, soll Ähnliches für äquivalente *Primteiler* angestrebt werden; hierbei muß offenbar ein anderer Weg eingeschlagen werden, da ein Primteiler, der nicht schon selbst Primärteiler ist, durch Multiplikation mit sich selbst oder einem äquivalenten Primteiler in ein wesentlich verschiedenes Element übergeht, also gewiß nicht normiert sein kann. Ich beginne mit der

Definition 2: Ist P' ein beliebiger Primärteiler aus $\mathfrak{R}$, so heißt ein Element A aus $\mathfrak{R}$ normal in bezug auf P' oder kurz normal, wenn es die Beziehung $P' \cdot A = P'$ erfüllt, also für P' ein rechtshändiges Einheitselement darstellt. Es gilt:

Satz 4: *Alle in bezug auf den Primärteiler* P' *normalen Ringele-*

mente sind Teiler von P' und die Produkte irgendwelcher unter ihnen sind wieder normal in bezug auf P'. Zu jedem normalen Element aus $\mathfrak{R}$, das kein Primärteiler ist, gibt es — außer eventuell in dem Fall, daß 2ε ein Nullteiler in $\mathfrak{R}$ ist — mindestens ein weiteres ihm äquivalentes, das gleichfalls normal ist, und, wenn die natürlichen Vielfachen des Einheitselements von $\mathfrak{R}$ sämtlich regulär sind, sogar unendlichviele verschiedene äquivalente normale Elemente.

Die ersten Behauptungen folgen unmittelbar aus der Definition der normalen Elemente. Was den zweiten Teil des Satzes betrifft, der übrigens hier weiterhin nicht mehr benutzt wird, und dessen Beweis daher nur skizziert werde, so sei $P \cdot \bar{P} = O$, wo $\bar{P}$ den Primteiler p, zu dem der Primärteiler P gehört, nicht mehr enthalte; ist dann $P \cdot A = P$, so ist auch $P \cdot B = P$, wo $B = A \cdot (\varepsilon + \bar{P})$, und hier ist erstens, wenn A keinen Primärteiler darstellt, $A \cdot \bar{P}$ nicht durch P teilbar und also $B \neq A$, zweitens kann $\bar{P}$ als so gewählt vorausgesetzt werden, daß unter der Annahme der Regularität von 2ε nach Analogie der beim Beweis des Satzes 2 benutzten Methode das Element $\varepsilon + \bar{P}$ leicht als regulär, also A und B als äquivalent zu erweisen sind. Sind schließlich alle natürlichen Vielfachen von ε regulär, so sind auch alle Elemente der Form $A \cdot (\varepsilon + m\bar{P})$, wo $\bar{P}$ wie vorhin gewählt ist und m jede beliebige natürliche Zahl darstellt, normal, untereinander verschieden und zu A äquivalent, w. z. b. w..

Sind hiernach die normalen Elemente, deren Existenz übrigens erst noch nachzuweisen sein wird, auch allerdings nicht wie die normierten durch eindeutige Bestimmtheit unter allen äquivalenten Elementen ausgezeichnet, so hat man in ihnen doch, wie durch Umkehrung der letzten Betrachtungen oder auch an Hand von Beispielen (vgl. nächste Seite) zu erkennen ist, sehr spezielle Vertreter je einer Klasse äquivalenter Nullteiler, und ihre Eigenschaften können, wie jetzt zu zeigen ist, zur Charakterisierung besonderer *Primteiler* mit Vorteil benutzt werden. Dabei sei noch im voraus bemerkt, daß in Ringen, deren Primteiler sämtlich äquivalent sind, die Null der einzige Primärteiler ist, also alle Elemente normal sind und somit die Betrachtung jede Bedeutung verliert.

Es sei jetzt p' ein beliebiger Primteiler aus $\mathfrak{R}$, P ein zu p' gehöriger Primärteiler und $P \cdot \bar{P} = O$, wo $\bar{P}$ durch p' nicht teilbar sei. Dann ist

$$P \cdot p' = P \cdot (p' + \bar{P}) = P \cdot \alpha,$$

wo α regulär ist; setzt man also $p' \cdot \alpha^{-1} = p$, so ist $P \cdot p = P$, d. h. p ist normal in bezug auf P. Wie beim Beweis des Satzes 1 (S. 163) erkennt man, daß p auch normal ist in bezug auf die zu P äquivalenten Primärteiler, ferner kann man, genau wie dies für Primteiler soeben geschah, aus *jedem* Teiler von P einen äquivalenten normalen bilden. Da schließlich nach Satz 4 zugleich mit p auch $p^2, p^3, p^4, \ldots$ normal sind, so hat man:

Satz 5: *Ist p' ein beliebiger Primteiler, P ein zu p' gehöriger Primärteiler eines Ringes $\mathfrak{R}$, so gibt es unter den zu p' äquivalenten Elementen mindestens einen normalen Primteiler p, der für alle zu ihm gehörigen Primärteiler und allgemeiner für alle durch letztere teilbaren Ringelemente ein rechtshändiges Einheitselement darstellt. Allgemein gibt es in jeder Klasse aller zu einem gegebenen Teiler von P äquivalenten Elemente je mindestens ein normales Element von den nämlichen Eigenschaften, und zwar sind $\varepsilon, p, p^2, p^3, \ldots$ solche Elemente in den durch sie gekennzeichneten Klassen. Normale Primärteiler und normierte Primärteiler sind identische Begriffe; steigt insbesondere der Primteiler p' nur bis zum endlichen Exponenten m, so ist der zu ihm gehörige normierte Primärteiler genau die m-te Potenz jedes in bezug auf ihn normalen Primteilers p.*

Beispiel für R_{360}: Die normalen Primteiler von R_{360} sind (vgl. dagegen die Aufzählung *aller* Primteiler a. S. 149): 46, 226; 201, 321; 145. Dabei ist $46 \backsim 226 \backsim 2$, $201 \backsim 321 \backsim 3$, während $145 \backsim 5$ und als normierter Primärteiler eindeutig bestimmt ist. Ferner ist z. B. $46^2 = 316$ wieder normal, während $46^3 = 136 = 46^4 = \cdots$ der zu 2 gehörige normierte Primärteiler ist; ebenso ist $201^2 = 81 = 201^3 = \cdots$.

Zum Schluß sei noch ein bemerkenswerter allgemeiner, bisher nur in speziellen Fällen bewiesener und benutzter Satz angeführt, der die Umkehrung des Satzes 4 von § 1 auf S. 147 darstellt:

Satz 6: *Irgend zwei äquivalente Elemente eines zerlegbaren Ringes können durch Multiplikation mit je einem regulären Element ineinander übergeführt werden.*

Dieser scheinbar selbstverständliche Satz bedarf hier im Gegensatz zur gewöhnlichen Arithmetik eines eingehenden Beweises, da trotz $A \backsim B$ sehr wohl $A = a \cdot B$, $B = b \cdot A$ sein kann, wo a und b Nullteiler sind. (Z. B. ist in R_{360}: $16 = 2 \cdot 8$, $8 = 68 \cdot 16$.) Doch sind die Materialien zum Beweis jetzt völlig entwickelt, so daß es genügt, dessen Gang anzudeuten. Man erkennt nämlich leicht, daß die Faktoren a und b nur solche *Primteiler* enthalten können, deren zugehörige Primärteiler in A und B ent-

halten sind. Durch eventuelle multiplikative Hinzufügung weiterer normaler Nullteiler dieser Art oder, falls A und B unendlichviele wesentlich verschiedene Primteiler enthalten sollten, durch Hinzufügung eines geeigneten normierten Nullteilers zu den schon in a und b enthaltenen und durch darauffolgende Addition einer geeigneten Darstellung der Null, wie dies bei den Beweisen der Sätze 1 und 5 (S. 162 und 166) geschah, lassen sich dann a und b in reguläre Elemente verwandeln, wie gewünscht.

Faßt man die wesentlichsten Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen für Ringe endlichen Grades in anschaulicher Form zusammen, so erhält man folgendes

Schlußergebnis: *$\mathfrak{R}$ sei ein zerlegbarer Ring endlichen Grades und $(p_1, p_2, \dots p_n)$ ein vollständiges System wesentlich verschiedener normaler Primteiler aus $\mathfrak{R}$; dann gibt es zu jedem p_i einen Exponenten m_i, bis zu dem p_i steigt. Man bilde dann erstens das System aller regulären Elemente aus $\mathfrak{R}$, das in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe bildet, und ferner die n Paenegruppen (gleichfalls in bezug auf die Multiplikation verstanden)*

$$(\varepsilon, p_1, p_1^2, \dots p_1^{m_1});\ (\varepsilon, p_2, p_2^2, \dots p_2^{m_2});\ \dots (\varepsilon, p_n, p_n^2, \dots p_n^{m_n}).$$

Dann hat die Reihe dieser $n+1$ Systeme folgende Eigenschaften:

1. *Kein Element aus $\mathfrak{R}$, außer dem in jedem System vorkommenden Einheitselement, ist zugleich in zwei Systemen enthalten.*

2. *Unter den Nullteilern dieser Systeme gibt es keine zwei äquivalenten.*

3. *Jedes Element aus $\mathfrak{R}$ ist — bis auf die Reihenfolge und eine durch deren Veränderung bedingte Modifikation des regulären Faktors — auf eine einzige Weise als Produkt aus je einem Element jedes dieser Systeme darstellbar.*

§ 4. Die Orthogonalteiler. Die Zerlegung der Ringe.

War bisher fast ausschließlich die multiplikative Zerlegung der Ringelemente Gegenstand der Betrachtung, so soll in diesem Paragraphen die Addition in den Vordergrund treten und der Ring in gewisser Weise additiv zerlegt werden.

Definition 1: Ist $P \cdot \bar{P} = O$, wo P ein zum Primteiler p aus $\mathfrak{R}$ gehöriger Primärteiler ist, während $\bar{P}$ den Primteiler p nicht mehr enthält, so heiße $\bar{P}$ ein dem Primteiler p komplementärer orthogonaler Teiler der Null oder kurz Orthogonalteiler.

Offenbar sind zwei zu wesentlich verschiedenen Primteilern komplementäre Orthogonalteiler auch untereinander wesentlich verschieden und umgekehrt. Der Fall, daß alle Primteiler des betrachteten Ringes untereinander äquivalent sind, führt ersichtlich zu Trivialitäten und soll von nun an stets ausgeschlossen bleiben; enthält der Ring nur zwei wesentlich verschiedene Primteiler, so sind die zum einen gehörigen Primärteiler zugleich die dem anderen komplementären Orthogonalteiler.

Die Orthogonalteiler von R_{360} sind so: 72, 144, 216, 288 (komplementär zum Primteiler 5); 40, 80, 160, 200, 280, 320 (komplementär zu 3); 45, 135, 225, 315 (komplementär zu 2).

Satz 1: *Das Produkt irgend zweier wesentlich verschiedener Orthogonalteiler aus* $\mathfrak{R}$ *ist stets gleich Null.*

p und q seien nämlich zwei wesentlich verschiedene Primteiler aus $\mathfrak{R}$, $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ zwei ihnen komplementäre Orthogonalteiler, und es sei $P \cdot \overline{P} = Q \cdot \overline{Q} = O$, wo P und Q Primärteiler bedeuten. Da Q (abgesehen von regulären Elementen) keinen Teiler besitzt, der auch in P enthalten ist, so muß $\overline{P}$ durch Q teilbar sein, d. h. $Q \cdot \overline{Q}$ ist in $\overline{P} \cdot \overline{Q}$ enthalten, oder es ist $\overline{P} \cdot \overline{Q} = O$, w. z. b. w..

Da jeder dem Primteiler p komplementäre Orthogonalteiler $\overline{P'}$ durch alle und nur die von p wesentlich verschiedenen Primteiler teilbar ist, so ist $\overline{P'} \cdot \overline{P'} \backsim \overline{P'}$, und zwar, wie man analog dem Verfahren von S. 162 unten erkennt oder aus Satz 6 des § 3 auf S. 167 folgert, $\overline{P'} \cdot \overline{P'} = \overline{P'} \cdot \alpha$, wo α regulär ist. Setzt man $\overline{P'} \cdot \alpha^{-1} = \overline{P}$, so folgt also: $\overline{P'} \cdot \overline{P} = \overline{P'}$. Überlegungen analog jenen, die auf S. 163 zum Satz 1 des § 3 führten, ergeben daher den

Satz 2: *Alle zu irgendeinem orthogonalen Nullteiler äquivalenten Elemente bilden in bezug auf die Multiplikation eine Gruppe, es gibt also unter ihnen insbesondere ein einziges normiertes Element* $\overline{P}$*, den dem Primteiler* p *komplementären normierten Orthogonalteiler, der das neutrale Element der Gruppe ist. Jeder normierte Orthogonalteiler ist allgemeiner auch ein Einheitselement für alle durch ihn teilbaren Elemente. In der Gruppe aller zu* $\overline{P}$ *äquivalenten Orthogonalteiler hat jede Gleichung* $A \cdot X = B$ *oder* $Y \cdot A = B$*, wo* $A \backsim B \backsim \overline{P}$*, je eine einzige Lösung.*

Die normierten Orthogonalteiler von R_{360} sind: 216, 280, 225.

Von nun an sollen hier ausschließlich solche Ringe betrachtet werden, die nur endlichviele wesentlich ver-

schiedene Primteiler, also auch nur endlichviele normierte Orthogonalteiler enthalten. Unter diese Klasse von Ringen fallen im besonderen alle Ringe endlichen Grades, dann auch Ringe unendlich hohen Grades, in denen aber jedenfalls mindestens ein Primteiler bis zu einem unendlich großen (symbolischen) Exponenten steigen muß. Für Ringe mit unendlichvielen wesentlich verschiedenen Primteilern wären Summen von unendlichvielen Gliedern zu betrachten, die zunächst keinen Sinn haben und für die erst besonders eine Art Konvergenzuntersuchung — übrigens verschieden von der gewöhnlichen Art einer solchen — zu führen wäre.

Für Ringe $\mathfrak{R}$ mit nur endlichvielen wesentlich verschiedenen Primteilern gilt nun:

Satz 3: *Die Summe aller verschiedenen normierten Orthogonalteiler aus $\mathfrak{R}$ ist gleich dem universalen Einheitselement ε aus $\mathfrak{R}$.*

Z. B. ist in R_{360}: $216 + 280 + 225 = 1$.

Es sei nämlich $(p_1, p_2, \dots p_n)$ ein vollständiges System wesentlich verschiedener Primteiler aus $\mathfrak{R}$; $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots \bar{P}_n$ seien die ihnen komplementären normierten Orthogonalteiler. Dann ist sicher $\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \pi$ regulär; denn durch den Primteiler p_i sind $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots \bar{P}_{i-1}, \bar{P}_{i+1}, \dots \bar{P}_n$, aber nicht $\bar{P}_i$ und also auch nicht π teilbar. Ferner ist

$$\pi \cdot \pi = \sum_1^n{}^i \bar{P}_i \cdot \bar{P}_i + \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}'_{k \neq i} \bar{P}_i \cdot \bar{P}_k$$

oder, da nach Satz 2 $\bar{P}_i \cdot \bar{P}_i = \bar{P}_i$, nach Satz 1 $\bar{P}_i \cdot \bar{P}_k = O$ $(i \neq k)$ ist, $\pi \cdot \pi = \pi$. Aus der Gruppeneigenschaft der regulären Elemente folgt schließlich, daß jedes normierte reguläre Element gleich ε ist, womit der Satz bewiesen ist.

Definition 2: Ist A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, $\bar{P}_i$ der dem Primteiler p_i aus $\mathfrak{R}$ komplementäre normierte Orthogonalteiler, so heiße das Produkt $A \cdot \bar{P}_i = A_i$ die Komponente von A in bezug auf den Primteiler p_i*). Diese Bezeichnung rechtfertigt sich durch

Satz 4: *Die Komponente eines Ringelements A in bezug auf den Primteiler p_i ist durch alle und nur solche Potenzen von p_i (allgemeiner durch alle und nur solche Teiler der zu p_i gehörigen Primärteiler) teilbar, durch die A selbst teilbar ist; sie ist dann und nur dann gleich Null, wenn A durch die zu p_i gehörigen Primärteiler teilbar ist.*

---

*) Hierzu und zum nächstfolgenden vergleiche man die (etwas spezielleren) Verhältnisse bei den g-adischen Zahlen (*Hensel*, Zahlentheorie, S. 86 ff. und 188 ff.).

In der Tat ändert sich ja A in bezug auf seine Teilbarkeit durch p_i gar nicht bei Multiplikation mit dem durch p_i nicht teilbaren Orthogonalteiler $\bar{P}_i$; ist aber A durch die zu p_i gehörigen Primärteiler teilbar, so enthält A_i *alle* Primärteiler von $\mathfrak{R}$.

Die Bedeutung der Komponenten liegt in folgendem

Satz 5: *Jedes Element aus $\mathfrak{R}$ ist gleich der Summe seiner Komponenten in bezug auf alle wesentlich verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{R}$. Ein Element ist dann und nur dann gleich Null, wenn jede einzelne seiner Komponenten gleich Null ist; zwei Elemente sind dann und nur dann einander gleich, wenn das nämliche von jedem Paar entsprechender Komponenten gilt.*

In der Tat ist: $A = A \cdot \varepsilon = A \cdot \bar{P}_1 + A \cdot \bar{P}_2 + \cdots + A \cdot \bar{P}_n$. Ferner kann ein Element aus $\mathfrak{R}$ nur dann gleich Null sein, wenn es durch jeden Primärteiler teilbar ist, was eben die zwei letzten Behauptungen besagen.

Z. B. ist in R_{360}: $7 = 7 \cdot 225 + 7 \cdot 216 + 7 \cdot 280 = 135 + 72 + 160$; $5 = 5 \cdot 225 + 5 \cdot 216 + 5 \cdot 280 = 45 + 0 + 320$.

Satz 6: *Die Komponente einer Summe bzw. eines Produktes in bezug auf einen Primteiler ist gleich der Summe bzw. dem Produkt der Komponenten der einzelnen Summanden bzw. Faktoren in bezug auf denselben Primteiler.*

Für die Summe ist der Satz selbstverständlich; für das Produkt wird er erhalten durch Multiplikation der Identitäten $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$, wenn man beachtet, daß für $i \neq k$ stets $A_i \cdot B_k = O$ ist, und die letzte Aussage von Satz 5 benutzt.

Definition 3: Ein Ring $\mathfrak{R}$ heiße einfach, wenn alle seine Primteiler untereinander äquivalent sind. Ein einfacher Ring ist natürlich immer zerlegbar.

Offenbar ist die Theorie derartiger Ringe außerordentlich viel einfacher als die der allgemeinen Ringe und in manchen Beziehungen fast ebenso einfach wie die Theorie der Körper; speziell sind die Fragen der Teilbarkeit und Quotientenbildung in einfachen Ringen stets sehr leicht zu entscheiden, da das diesbezügliche Verhalten zweier Elemente zueinander völlig klar ist, sobald man weiß, welches von ihnen die Primteiler von $\mathfrak{R}$ in höherer Potenz enthält.

Man bilde nun zu jedem normierten Orthogonalteiler $\bar{P}_i$ des allge-

meinen Ringes $\mathfrak{R}$ das System $\mathfrak{R}_i$ aller durch $\bar{P}_i$ teilbaren Elemente von $\mathfrak{R}$ oder — was, abgesehen von untereinander gleichen Elementen, das nämliche ist — das System der Komponenten aller Elemente von $\mathfrak{R}$ in bezug auf den Primteiler p_i, dem $\bar{P}_i$ komplementär ist. Jedes solche System $\mathfrak{R}_i$ bildet, wie leicht erkennbar, in bezug auf die im Ring $\mathfrak{R}$ definierten und innerhalb $\mathfrak{R}_i$ stets ausführbaren Operationen der Addition und der Multiplikation einen einfachen Ring, der alle Bedingungen erfüllt, dessen Einheitselement $\bar{P}_i$ ist und dessen Primteiler äquivalent zu $\bar{P}_i \cdot p_i$ sind. Hieraus und aus der Darstellung eines beliebigen Elements von $\mathfrak{R}$ als Summe seiner Komponenten folgt der *fundamentale*

Satz 7: *Jeder beliebige zerlegbare Ring $\mathfrak{R}$, der n wesentlich verschiedene Primteiler der Null enthält, läßt sich stets und nur auf eine einzige Weise in n und nicht weniger einfache Ringe $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_n$ zerlegen derart, daß jeder dieser einfachen Ringe nur Elemente aus $\mathfrak{R}$ enthält, kein Element von $\mathfrak{R}$ (außer der natürlich in jedem $\mathfrak{R}_i$ enthaltenen Null) in zwei verschiedenen der Ringe $\mathfrak{R}_i$ vorkommt, daß ferner das Produkt irgend welcher Elemente aus zwei verschiedenen Ringen $\mathfrak{R}_i$ stets gleich Null ist und schließlich jedes Element aus $\mathfrak{R}$ sich auf eine und nur eine einzige Weise als Summe je eines Elements aus jedem der Ringe $\mathfrak{R}_i$ darstellen läßt.*

So ist z. B. R_{360} zerlegbar in die drei einfachen Ringe:
(0, 72, 144, 216, 288) (Körper), (0, 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320),
(0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315).

Von den Behauptungen dieses Satzes, der also *die Möglichkeit der Zurückführung beliebiger zerlegbarer Ringe auf einfache Ringe* behauptet (die *Art* dieser Zurückführung ergibt sich aus den vorangegangenen Erörterungen), ist noch diejenige zu beweisen, welche besagt, daß diese Zerlegung eines Ringes durch die im Satze ausgesprochenen Eigenschaften *eindeutig* bestimmt ist. Dieser Beweis läßt sich jetzt höchst einfach in vier Schritten führen.

1. Ich zeige zunächst, daß das Einheitselement eines jeden der einfachen Ringe, z. B. das Einheitselement e_1 von $\mathfrak{R}_1$, entweder regulär oder ein Primärteiler oder ein Produkt von Primärteilern ist. In der Tat, ist $e_1 = e_1' \cdot e_1''$, wo e_1' gleichzeitig mit jedem Primteiler den zugehörigen Primärteiler enthält, während e_1'' weder durch einen Primärteiler noch durch einen in e_1' enthaltenen Primteiler teilbar ist, so folgt durch Quadrierung der letzten Beziehung $e_1 \backsim e_1' \cdot e_1''^2$, weil ja e_1 nach Voraussetzung normiert

ist; da aber ein in e_1'' enthaltener Primteiler in $e_1''^2$ in höherer Potenz enthalten sein müßte als in e_1'', ist e_1'' notwendig regulär. Hiermit ist diese erste Behauptung unter alleiniger Benutzung *der Ringeigenschaft der* $\mathfrak{R}_i$ bewiesen.

2. Ich ziehe nun die Eigenschaften der *Orthogonalität der* $\mathfrak{R}_i$ (des Verschwindens der Produkte irgend welcher Elemente aus verschiedenen $\mathfrak{R}_i$) und der *eindeutigen additiven Darstellbarkeit* der Elemente von $\mathfrak{R}$ heran, um zu zeigen, daß jeder der einfachen Ringe, z. B. $\mathfrak{R}_1$, neben seinem Einheitselement e_1 alle Produkte $A \cdot e_1$ enthält, wo A ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Ist nämlich die Darstellung des Elements $A \cdot e_1$ aus $\mathfrak{R}$ als Summe je eines Elements aus jedem einfachen Ring die folgende: $A \cdot e_1 = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$, wo m die vorläufig unbekannte Anzahl der $\mathfrak{R}_i$ ist, so gibt die Multiplikation mit e_1: $A \cdot e_1 = A_1 + O + \cdots + O$; hieraus aber folgt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung und des Vorkommens der Null in jedem $\mathfrak{R}_i$, daß $A_2 = \cdots = A_m = O$ ist und also $A \cdot e_1$ wirklich in $\mathfrak{R}_1$ vorkommt.

3. Nunmehr ergibt sich unmittelbar aus der *Einfachheit* der $\mathfrak{R}_i$, daß, wenn n die Anzahl der wesentlich verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{R}$ bedeutet, jedes der Einheitselemente der $\mathfrak{R}_i$ durch mindestens $n-1$ wesentlich verschiedene Primärteiler teilbar und demnach ein normierter Orthogonalteiler oder Null ist. In der Tat, wäre z. B. e_1, wie es aus der gegenteiligen Annahme wegen 1. folgen würde, durch die wesentlich verschiedenen Primteiler p_i und p_k von $\mathfrak{R}$ nicht teilbar, so wären nach 2. doch $p_i \cdot e_1$ und $p_k \cdot e_1$ Elemente von $\mathfrak{R}_1$ und diese hätten, wie man sich sehr leicht überzeugt, in $\mathfrak{R}_1$ den Charakter zweier wesentlich verschiedener Primteiler.

4. Da also alle Elemente eines jeden Ringes $\mathfrak{R}_i$ durch alle Primteiler bis auf höchstens einen teilbar sind, so muß es, damit z. B. reguläre Elemente additiv dargestellt werden können, mindestens n solche einfache Ringe geben, und zwar genau n, wenn man die trivialen Ringe ausschließt, deren Elemente sämtlich gleich Null sind. Der Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung ist also völlig erbracht.

Satz 8: *Ist der Ring* $\mathfrak{R}$ *auf die in Satz 7 angegebene Weise in einfache Ringe* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots \mathfrak{R}_n$ *zerlegt, die alle durch* $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots \overline{P}_n$ *teilbaren Elemente enthalten, so hat eine Gleichung mit Koeffizienten aus* $\mathfrak{R}$

$$A^{(0)} \cdot X^m + A^{(1)} \cdot X^{m-1} + \cdots + A^{(m-1)} \cdot X + A^{(m)} = O$$

dann und nur dann eine Lösung X *in* $\mathfrak{R}$, *wenn jede der Gleichungen*

$$(i) \qquad A_i^{(0)} \cdot X^m + A_i^{(1)} \cdot X^{m-1} + \cdots + A_i^{(m-1)} \cdot X + A_i^{(m)} = O, \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

wo $A_i^{(k)} = A^{(k)} \cdot \bar{P}_i$ die Komponente von $A^{(k)}$ in bezug auf den Primteiler p_i, also ein Element von $\mathfrak{R}_i$ bedeutet, in dem einfachen Ring $\mathfrak{R}_i$ eine Lösung besitzt. Ist letzteres der Fall und ist $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ ein System von Lösungen der n Gleichungen, so ist das dem Ring $\mathfrak{R}$ angehörige Element $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung in $\mathfrak{R}$; hat im besonderen jede der Gleichungen (i) in $\mathfrak{R}_i$ endlichviele, und zwar l_i $(\geqq 0)$ verschiedene Lösungen, so hat die gegebene Gleichung genau $l_1 l_2 \cdots l_n$ verschiedene Lösungen in $\mathfrak{R}$; hat auch nur eine der Gleichungen (i) unendlichviele verschiedene Lösungen, so hat die gegebene Gleichung, wenn überhaupt eine, dann unendlichviele verschiedene Lösungen.

In der Tat folgt aus Satz 6, daß die Komponente einer ganzen rationalen Funktion von Elementen aus $\mathfrak{R}$ in bezug auf p_i gleich derjenigen Funktion ist, die aus der ursprünglichen entsteht, wenn für jedes vorkommende Element aus $\mathfrak{R}$ seine Komponente in bezug auf p_i genommen wird. Werden umgekehrt die Gleichungen (i) durch die Elemente X_i der Ringe $\mathfrak{R}_i$ erfüllt, so setze man X_i für X in diesen Gleichungen ein und addiere die so entstandenen n Identitäten im Ringe $\mathfrak{R}$; da alsdann wegen $\bar{P}_i \cdot \bar{P}_k = O$ $(i \neq k)$

$$\begin{aligned} &A_1^{(k)} X_1^{m-k} + A_2^{(k)} X_2^{m-k} + \cdots + A_n^{(k)} X_n^{m-k} \\ &= (A_1^{(k)} + A_2^{(k)} + \cdots + A_n^{(k)}) \cdot (X_1^{m-k} + X_2^{m-k} + \cdots + X_n^{m-k}) \\ &= A^{(k)} \cdot (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^{m-k} \end{aligned}$$

ist, so wird die gegebene Gleichung wirklich durch das Element $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ aus $\mathfrak{R}$ erfüllt. Die letzten Behauptungen des Satzes schließlich folgen aus dem Schluß von Satz 5 (S. 171).

Durch Satz 8 ist im besonderen auch die Frage nach der Existenz eines Quotienten zweier Elemente eines allgemeinen Ringes auf die triviale entsprechende Frage für einfache Ringe reduziert.

Besonders einfach gestalten sich diese Ergebnisse, wenn alle Primteiler von $\mathfrak{R}$ nur bis zum Exponenten 1 steigen, wie es z. B. im Ring der Kongruenzklassen für eine beliebige, kein Quadrat enthaltende Zahl als Modul oder in jedem Ring g-adischer Zahlen der Fall ist. Da in Ringen dieser Art ein Element von $\mathfrak{R}$ dann und nur dann durch den Primteiler p_i teilbar ist, wenn seine Komponente in bezug auf p_i gleich Null ist, und da ferner eine Gleichung m-ten Grades bekanntlich in einem Körper höchstens m Wurzeln besitzt, so folgt für diesen Fall:

Satz 9: *Steigen die n wesentlich verschiedenen Primteiler eines Ringes $\mathfrak{R}$ sämtlich nur bis zum Exponenten* 1, *so sind die einfachen Ringe $\mathfrak{R}_i$, in die sich $\mathfrak{R}$ zerlegen läßt, sämtlich (eventuell nichtkommutative) Körper, und eine beliebige Gleichung m-ten Grades in $\mathfrak{R}$ hat daher, wenn jeder dieser Körper $\mathfrak{R}_i$ unendlichviele verschiedene Elemente enthält, entweder höchstens m^n oder unendlichviele verschiedene Lösungen. Insbesondere kann man ein Element A durch ein anderes B in $\mathfrak{R}$ dann und nur dann dividieren, wenn für jeden Primteiler p_i, für den die zugehörige Komponente von B verschwindet, dasselbe von der zugehörigen Komponente von A gilt; und dann und nur dann ist die Division eindeutig, wenn überhaupt kein Primteiler der letztgenannten Art in $\mathfrak{R}$ existiert.*

Schließlich lassen sich die wesentlichsten Resultate dieses Paragraphen auch so formulieren:

Schlußergebnis: *Die Elemente eines beliebigen zerlegbaren Ringes $\mathfrak{R}$, der endlichviele und zwar n wesentlich verschiedene Primteiler enthält, lassen sich darstellen als komplexe Zahlen mit n Haupteinheiten e_i: $A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$, mit denen nach den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik zu rechnen ist, nur daß die Multiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist und gemäß den Relationen $(a_i e_i) \cdot (b_i e_i) = (a_i \cdot b_i) e_i$, $(a_i e_i) \cdot (b_k e_k) = O$ $(i \neq k)$ ausgeführt wird. Hierbei gehören aber die Koeffizienten der Haupteinheiten keineswegs alle einem und demselben Körper an*), sondern die Koeffizienten jeder einzelnen Haupteinheit bilden je einen einfachen Ring oder, falls alle Primteiler von $\mathfrak{R}$ nur bis zum Exponenten* 1 *steigen, je einen Körper. Umgekehrt genügt jedes derartige System komplexer Zahlen allen in diesem Aufsatz ausgesprochenen Bedingungen und Sätzen.*

Die letzte Behauptung läßt sich leicht rückwärts einsehen; z. B. sind, wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ die Einheitselemente, $p_1, p_2, \ldots p_n$ je irgendwelche Primteiler der n Koeffizientenringe bedeuten, $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$ das Einheitselement von $\mathfrak{R}$, ferner $\varepsilon_2 e_2 + \varepsilon_3 e_3 + \cdots + \varepsilon_n e_n$, $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_3 e_3 + \cdots + \varepsilon_n e_n$, $\ldots$ $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} e_{n-1}$ alle normierten Primärteiler, $p_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$, $\varepsilon_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + \varepsilon_n e_n$, $\ldots$ $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2 + \cdots + p_n e_n$ ein vollständiges System wesentlich verschiedener normaler Primteiler aus $\mathfrak{R}$ usw..

---

*) Vgl. *L. E. Dickson*, Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. 4 (1903), p. 21 und ferner eine Bemerkung desselben Autors ebenda, vol. 6 (1905), p. 348, die durch die obigen Ausführungen weiter fortgeführt wird.

Verzeichnis der Termini.

	Seite
äquivalent	147
Einheitselement	144
enthalten	147
Exponent, bis zu dem ein Primteiler steigt	157, 159
Grad eines Ringes	148
Gruppe	142
(nichtkommutativer) Körper	145
komplementär (bei Orthogonalteilern)	168
Komponente eines Elements in bezug auf einen Primteiler	170
neutrales Gruppenelement	142/3
normales Element	165
normiertes Element	163
Null, Nullelement	143
Nullteiler	144
Ordnung eines Ringes	148
Orthogonalteiler der Null	168
Paenegruppe	143
Primärteiler der Null	159
Primteiler der Null	149
R_m	147
reguläres Element	144
Ring	143 ff., vgl. 156 u. 169/70
—, einfacher	171
—, endlicher, unendlicher	148
—, kommutativer	145
— der Kongruenzklassen modulo m	147
—, zerlegbarer	152, vgl. 156
teilbar, Teiler (echter —)	147
Teiler der Null	144
unwesentlich verschieden	147
wesentlich verschieden	147

Inhalt.

	Seite
Einleitung	139
§ 1. Die Ringe im allgemeinen	141
§ 2. Die zerlegbaren Ringe, ihre Primteiler und Primärteiler der Null und die multiplikative Zerlegung ihrer Elemente	149
§ 3. Die normierten Primärteiler und die normalen Primteiler	162
§ 4. Die Orthogonalteiler. Die Zerlegung der Ringe	168

Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung.

(*H. A. Schwarz* zu seinem 50-jährigen Doktorjubiläum
am 6. August 1914 zugeeignet.)

Von Herrn *Paul Koebe* in Leipzig.

I. Die Kreisabbildung des allgemeinsten einfach und zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs und die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

A. Einleitung.

In vorliegender Abhandlung, welche als erste einer der Kette meiner spezifischen Uniformisierungsarbeiten*) parallellaufenden selbständigen Serie von Arbeiten gedacht ist, bringe ich zunächst (erster Teil) die von mir als „*Schmiegungsverfahren*“ bezeichnete, in den Gött. Nachr. 1912**) vorläufig skizzierte Methode der konformen Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Kreisfläche zur ausführlichen Entwickelung. Der abzubildende, einfach zusammenhängende Bereich wird zunächst auf einen innerhalb des Einheitskreises befindlichen Bereich abgebildet, was immer durch Anwendung linearer Transformationen,

*) Ich verweise insbesondere auf meine Arbeiten „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven“ und „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“ in Math. Ann. Bd. 67, 69, 72, 75 bezw. dieses Journal, Bd. 138, 139, Annali di Matematica Bd. 21 (*Lagrange*-Festband II), Leipziger Berichte 1914, Jahresbericht der D. M. V. 1913 (Referat), ferner auf die darauf Bezug nehmenden Veröffentlichungen: *Osgood:* „Lehrbuch der Funktionentheorie“ (2. Auflage, Teubner 1912), *Study:* „Vorlesungen über Geometrie“, Bd. II (Teubner 1913), *Weyl:* „Die Idee der *Riemann*schen Fläche“ (Teubner 1913), *Fricke-Klein:* „Vorlesungen über automorphe Funktionen“ Bd. II, Schlußlieferung (Teubner 1912). Wegen ausführlicherer Literaturangaben sei verwiesen auf die Zusammenstellungen in meinen genannten Annalenarbeiten und in genanntem Referat.

**) „Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.“ Nachr. d. Ges. d. Wiss., math.-phys. Kl., 1912, S. 844 ff.

eventuell unter Hinzuziehung einer Quadratwurzeloperation möglich ist. Nunmehr wird auf den Bereich, der den Nullpunkt enthaltend vorgestellt wird, eine den Nullpunkt fest lassende, unendliche Folge von Quadratwurzeloperationen angewandt, welche eine immer stärkere Anschmiegung der Begrenzung an die Peripherie des Einheitskreises bewirken und in der Grenze die gesuchte Abbildung liefern.

Im Fall des zweifach zusammenhängenden schlichten Bereichs (zweiter Teil) handelt es sich um die konforme Abbildung auf die Fläche eines Kreisrings, wobei grundsätzlich neue Schwierigkeiten, die nochmalige Konvergenzbetrachtungen nötig machen, nicht auftreten.

Schließlich gibt (dritter Teil) die Frage der Ränderzuordnung bei der konformen Abbildung zu einer besonderen Untersuchung Anlaß, eine Frage, welche bei den im ersten und zweiten Teile gegebenen Existenzbeweisen ganz außer Betracht blieb. Hier handelt es sich nun einerseits um die Gewinnung der alten *Schwarz*schen Resultate über die Ränderzuordnung im Falle analytischer Begrenzung einschließlich der Stetigkeit in Ecken und Spitzen (*Schwarz-Picard*), andererseits um die Gewinnung der mehr der abstrakten Sphäre angehörenden neueren allgemeinen Resultate von *Osgood*, (*Fatou*), *Study*, *Carathéodory*, auf welche ich meinerseits bereits in einer kleinen vorläufigen Note in den Gött. Nachrichten 1913 eingegangen bin, und welche hier eine wohl kaum noch weiterer Vereinfachung fähige Entwickelung finden.

Die in vorliegender Abhandlung behandelten Probleme und gewonnenen Hauptresultate erheben, wie aus dem Gesagten bereits hervorgeht, als solche nicht den Anspruch auf Neuheit*). Sie wollen vielmehr durch die Methode der Behandlung gewürdigt werden. Als ein Charakteristikum dieser Methode hebe ich die vollständige (abgesehen von § 12) Vermeidung des Integralbegriffs hervor, so daß die ganze Beweisführung auf die allgemeinen elementaren Grundlagen der Potenzreihentheorie gestellt und insofern die vorgetragene Theorie der *Weierstraß*schen Funktionentheorie eingeordnet erscheint. Es ist von prinzipiellem Interesse, die hiermit bezeichnete Forderung in möglichst weitem Umfange zur Durchführung

*) Die erste Behandlung der Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs gibt *Osgood* in Trans. of the Am. Math. Soc., 1900. Dieselbe fußt wesentlich auf vorausgegangenen Entwicklungen von *Schwarz* und *Poincaré*.

zu bringen und dadurch eine immer tiefere Durchdringung *Riemann*schen und *Weierstraß*schen Geistes in der Funktionentheorie herbeizuführen*).

Häufigen Gebrauch mache ich im folgenden von dem Satze, daß eine von einer Konstanten verschiedene analytische Funktion $f(z)$ an einer regulären Stelle z_0 kein Maximum des absoluten Betrages liefern kann sowie kein Minimum des absoluten Betrages, falls sie in z_0 nicht geradezu den Wert Null hat, ferner kein Maximum oder Minimum der Werte des reellen Teiles von $f(z)$. Diese Sätze sind alle aus dem Potenzreihenbegriff sofort erhältlich. Man braucht nur in bekannter Weise den Funktionswert als Summe von drei Bestandteilen darzustellen in der Weise $F(z) = F(z_0) + a_n(z-z_0)^n + (z-z_0)^{n+1} \cdot \bar{F}(z)$, unter a_n eine von Null verschiedene Konstante verstehend, unter n eine ganze positive Zahl $\geqq 1$ und unter $\bar{F}(z)$ eine in z_0 reguläre Funktion. Beschränkt man sich auf eine hinreichend kleine Nachbarschaft der Stelle z_0, so wird der dritte Bestandteil, absolut genommen, kleiner als der zweite Bestandteil, absolut genommen, und daher wird das zweite Glied für die erwähnten, den genannten vier Sätzen entsprechend zu treffenden Entscheidungen das ausschlaggebende, sofern man die Richtung des die Größe $a_n(z-z_0)^n$ repräsentierenden Vektors im ersten Falle mit der des Vektors $F(z_0)$ übereinstimmend wählt, im zweiten Falle dieser Richtung entgegengesetzt, im dritten Falle

---

*) In dieser Beziehung will ich neben meiner dritten Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven (Gött. Nachr. 1908), in welcher ich zuerst den Nutzen eines „*allgemeinen Konvergenzprinzips*“ für die konforme Abbildung gezeigt habe, noch besonders auf meine Note „zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung“ in den Leipziger Berichten (1914) hinweisen, in welcher u. a. eine Lösung des allgemeinen Uniformisierungsproblems in dem bezeichneten Sinne mitgeteilt ist. In gewissem Umfange findet sich die Tendenz auch bei *Gauß* (arithmetisch-geometrisches Mittel), *Schwarz* (Züricher Programmschrift 1869/70, Ges. Abh. Bd. II, S. 108 ff.), *Poincaré* (Acta math. Bd. IV), *Schlesinger* (dieses Journ. Bd. 105 und 110, Ann. de l'École Normale Bd. 20, 1903), *Carathéodory* (Math. Ann. Bd. 72, 1912), jedoch nicht mit dem Bewußtsein einer allgemeinen Richtung gebenden Idee. In der gemeinten Abhandlung des letzteren, deren Titel wegen ihrer näheren Beziehung zum Gegenstande der vorliegenden Abhandlung hier noch aufgeführt werde: „Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten“, bildet das erwähnte „allgemeine Konvergenzprinzip“ (S. 120) ebenfalls den Hauptbeweisgrund. Übrigens findet dieses oft bequeme Prinzip in vorliegender Abhandlung keine Anwendung.

übereinstimmend mit der positiven Richtung der Achse des Reellen, im vierten Falle dieser Richtung entgegengesetzt.

B. Erster Teil.

Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises. Das Schmiegungsverfahren.

§ 1.

Vorbereitungen.

Es sei B ein beliebiger, einfach zusammenhängender Bereich der z-Ebene, welcher jedoch nicht mit der ganzen z-Ebene, einschließlich des unendlich fernen Punktes, identisch sein soll und dessen ganze Begrenzung nicht nur von einem einzigen Punkte gebildet sein möge. Wir verstehen unter dem Bereich B bei strenger Definition im folgenden lediglich die Gesamtheit der eigentlichen inneren Punkte, deren einzelner stets zugleich mit einer vollen Umgebung zum Bereiche gehört. Die übrigen Punkte der z-Ebene sind dann entweder Grenzpunkte des Bereichs oder äußere Punkte, je nachdem es in beliebiger Nähe eines derartigen Punktes noch Punkte des Bereichs, d. i. innere Punkte gibt oder nicht. Ein Häufungspunkt von Grenzpunkten ist stets wieder ein Grenzpunkt, und die Gesamtheit der Grenzpunkte bildet ein zusammenhängendes Kontinuum, die Grenze des Bereichs B, ein Kontinuum, welches selbst nicht den Charakter eines Bereichs hat, d. h. keinen Punkt besitzt, von welchem eine vollständige Umgebung zum Kontinuum gehört. Die zu lösende Aufgabe ist nun die folgende:

Formulierung des Abbildungsproblems: Es soll eine in B eindeutige, reguläre analytische Funktion $z' = f(z)$ gefunden werden, welche an je zwei Stellen des Bereichs B voneinander verschiedene Werte annimmt und dadurch eine eineindeutige konforme Abbildung des Bereichs B auf das vollständige Innere des Einheitskreises vermittelt. —

Für die oben ausgeschlossenen Fälle (Vollebene und einfach punktierte Ebene) besitzt die soeben formulierte Abbildungsaufgabe sicher keine Lösung, wie man sofort erkennt aus dem Umstande, daß nach eventueller Verlegung der Punktierung in den unendlich fernen Punkt der z-Ebene $f(z)$ eine reguläre analytische Funktion wäre, deren Werte dem absoluten Be-

trage nach unterhalb 1 bleiben. Diese Funktion müßte sich daher auf eine Konstante reduzieren. Der hier benutzte Hilfssatz, daß eine für alle endlichen Werte der unabhängigen Variablen z reguläre, eindeutige analytische Funktion $F(z)$, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, sich auf eine Konstante reduziert, wird potenzreihentheoretisch am einfachsten folgendermaßen bewiesen: Die Funktion $\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$ ist für alle endlichen z regulär und wird bestimmt unendlich klein, wenn z unendlich groß wird. Diese Funktion würde demnach im Endlichen ein Maximum ihres absoluten Betrages erreichen, wenn sie nicht identisch verschwindet. —

In dem von uns zugrunde gelegten allgemeinen Falle läßt sich sofort zeigen, daß die zu bestimmende Funktion, sofern sie überhaupt existiert, abgesehen von einer linearen Transformation, die das Innere des Einheitskreises in sich überführt, vollständig bestimmt ist, und daß daher die Abbildungsaufgabe dadurch zu einer vollständig bestimmten gemacht werden kann, daß man vorschreibt, ein gegebener Punkt z_0 in B solle in einen ebenfalls gegebenen Punkt z_0' innerhalb des Einheitskreises übergehen und eine in z_0 gegebene Fortgangsrichtung in eine in z_0' gegebene Fortgangsrichtung. Der Beweis dieses Unitätssatzes reduziert sich darauf, zu zeigen, daß eine umkehrbar eindeutige Transformation $z' = \varphi(z)$ des Inneren des Einheitskreises auf sich selbst, bei welcher der Nullpunkt fest bleibt, die Form $e^{i\alpha} \cdot z$ hat, d. h. geometrisch gesprochen, eine Drehung der z-Ebene mit dem Nullpunkt als Fixpunkt darstellt. Es ist nämlich*) $\frac{\varphi(z)}{z}$ eine für $|z|<1$ reguläre und stets von Null verschiedene Funktion, deren absoluter Betrag auf dem Kreise $|z| = 1-\varepsilon$ und daher auch für alle Punkte $|z|<1-\varepsilon$ zwischen $1+\eta$ und $1-\eta$ liegt, unter η eine zugleich mit ε unendlich klein werdende positive reelle Größe verstanden. Unter diesen Umständen kann $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ für den einzelnen Punkt der Fläche $|z|<1$ nur den Wert 1 haben, muß also konstant gleich 1 sein, was bei einer regulär analytischen Funktion nur möglich ist, wenn sie selbst eine Konstante ist, d. h. $\frac{f(z)}{z} \equiv c$, unter c eine reelle oder komplexe Konstante vom absoluten Betrage 1 verstanden.

*) Vgl. *Poincaré*, Acta math. Bd. 4, 1883, pag. 232.

Die von uns nunmehr in Angriff zu nehmende Aufgabe der konformen Abbildung des gegebenen Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises werden wir durch unendlich viele Quadratwurzeloperationen bewirken, welche wir zweckmäßig als die *Schmiegungsoperationen* bezeichnen, weil die wesentliche Eigenschaft der einzelnen dieser Operationen die ist, eine Verstärkung der Anschmiegung der Begrenzungslinie des jeweilig abzubildenden Bereichs an die Peripherie des Einheitskreises, und zwar vom Innern her zu bewirken.

Als *erste vorbereitende Schmiegungsoperation* definieren wir eine solche, welche bewirkt, daß der Bereich B eineindeutig konform abgebildet wird auf einen Bereich B_1, welcher vollständig im Innern des Einheitskreises liegt und den Nullpunkt enthält*).

Besitzt der Bereich B einen äußeren Punkt z_0, so genügt offenbar eine lineare Transformation der Form $\frac{a}{z-z_0}$, unter a eine hinreichend klein zu wählende Konstante verstanden. Besitzt B keinen äußeren Punkt, was z. B. bei einem Schlitzbereiche (ganze längs eines Schlitzes aufgeschnittene Ebene) der Fall ist, so ist die Anwendung einer Quadratwurzel erforderlich. Es seien a und b irgend zwei voneinander verschiedene Grenzpunkte des Bereichs B. Bilden wir dann mit der Funktion $z' = \frac{z-a}{z-b}$ den Bereich konform ab, so werden 0 und ∞ Grenzpunkte des neuen Bereichs B'. Wird nunmehr die Operation $\sqrt{z'}$ auf den Bereich B' angewandt, so ergibt sich ein Bereich B'', welcher sicher äußere Punkte aufweist. Denn zunächst ist die Funktion $\sqrt{z'}$ nach Fixierung irgendeines Ausgangswertes in B' eindeutig, weil sie in B' unverzweigt ist und weil B' einfach zusammenhängend ist. Ist nun z_0' irgendein Punkt in B', so wird dort ein Wert $\sqrt{z_0'}$ angenommen, und folglich kann der Wert $-\sqrt{z_0'}$ von der betrachteten Funktion in B' nicht angenommen werden, einerseits wegen der Eindeutigkeit der Funktion $\sqrt{z'}$ in B' und andererseits deswegen, weil der Wert $-\sqrt{z_0'}$ nur an der Stelle z_0' angenommen werden kann. Dasselbe gilt von den Werten $-\sqrt{z'}$ einer gewissen Umgebung der Stelle z_0'. Damit ist gesagt, daß B'' ein zweidimensionales Stück der Ebene unbe-

*) Vgl. die analogen Bemerkungen, welche ich in Gött. Nachr. 1907 S. 644 mache.

deckt läßt, d. h. äußere Punkte besitzt und nunmehr seinerseits mittelst einer linearen Transformation auf einen Bereich B_1 abgebildet werden kann, welcher innerhalb des Einheitskreises liegt.

Unser oben gestelltes Abbildungsproblem reduziert sich somit, wenn nochmals zwei lineare Transformationen des Einheitskreises in sich zu Hilfe genommen werden, auf folgendes Abbildungsproblem: *Einen einfach zusammenhängenden schlichten Bereich B_1 innerhalb des Einheitskreises mit dem Nullpunkt als innerem Punkt konform auf das vollständige Innere des Einheitskreises abzubilden in der Weise, daß der Nullpunkt und die positiv reelle Fortgangsrichtung R im Nullpunkte fest bleiben.*

Vermöge des Übergangs vom Bereich B (z-Ebene) zum Bereiche B_1 (z_1-Ebene) sind wir in der Lage, in allen Fällen festzustellen, daß eine Abbildung des von mehr als *einem* Punkte begrenzten einfach zusammenhängenden Bereichs B auf die im Unendlichen punktierte Ebene (Z-Ebene) nicht möglich ist; denn es wäre $z_1(Z)$ eine für alle endlichen Z eindeutige reguläre und beschränkte Funktion, die sich somit auf eine Konstante reduzieren müßte. Dasselbe Resultat ergibt sich uns übrigens auch ohne Bezugnahme auf den Bereich B_1 folgendermaßen: Es sei z_0 ein endlicher Punkt von B, dem der Punkt Z_0 bei der hypothetischen Abbildung entspreche. Dann ist $\frac{1}{z-z_0}$ eine in der Form $\frac{C}{Z-Z_0} + \mathfrak{P}(Z-Z_0)$ an der Stelle Z_0 entwickelbare Funktion von Z. Es ist sodann $\frac{1}{z-z_0} - \frac{C}{Z-Z_0}$ eine für alle endlichen Z reguläre Funktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, mithin eine Konstante; also wäre z eine ganze oder gebrochene lineare Funktion von Z; also wäre B ein Bereich, dessen vollständige Begrenzung sich auf einen Punkt reduzieren müßte, wie die Begrenzung der punktierten Z-Ebene. Vom Bereiche B war jedoch vorausgesetzt worden, daß seine Begrenzung sich nicht auf einen Punkt reduzieren soll.

§ 2.

*Das Schmiegungsverfahren und die Schmiegungswirkung desselben**).

Wir definieren nunmehr eine unendliche Folge von eineindeutigen

*) Vgl. die Voranzeige in Gött. Nachr. 1912, S. 844 ff. Vgl. ferner wegen verschiedener Beweiselemente: Gött. Nachr. 1907, S. 203 u. 644; Math. Ann. Bd. 67, S. 209 u. 216; dieses Journ. Bd. 139, S. 261.

konformen Abbildungen, von welchen die erste den Bereich B_1 unter Festhaltung des Richtungselements R in einen Bereich B_2, die zweite den Bereich B_2 unter Festhaltung von R in einen Bereich B_3 überführt und so weiter. Alle sich ergebenden Bereiche $B_1, B_2, \ldots$ sind innerhalb des Einheitskreises enthalten, und es mögen, unter z_1 einen in B_1 variablen Punkt verstanden, die sich ergebenden, den genannten Bereichen angehörenden Bildpunkte von z_1 mit $z_2, z_3, \ldots$ bezeichnet werden. Wird mit $1-\delta_n$ der Radius der größten Kreisfläche K_n mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt bezeichnet, welcher vollständig in B_n enthalten ist, mit δ_n demnach die Breite des vom Einheitskreise als äußerem Begrenzungskreis und vom Kreise K_n als innerem Kreis gebildeten Kreisrings R_n, so wird sich für die Bereiche B_n die Haupteigenschaft ergeben

$$\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \cdots; \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0;$$

d. h. die Bereiche $B_1, B_2, B_3, \ldots$ schmiegen sich mit ihren Begrenzungslinien $L_1, L_2, L_3, \ldots$ mehr und mehr der Peripherie des Einheitskreises an. Die Bereiche B_n selbst gehen also schließlich in die vollständige Fläche des Einheitskreises über.

Der Bereich B_{n+1} wird allgemein aus dem Bereiche B_n in folgender Weise gefunden. Es wird auf der Linie L_n der dem Nullpunkte am nächsten liegende Punkt α_n aufgesucht. Gibt es mehr als einen solchen Punkt, so genügt es, irgendeinen derselben zu wählen. Wir wollen etwa, um einen bestimmten erklärt zu haben, sagen: wir wählen stets den von größter Amplitude, wobei wir für die Amplitudenbestimmung nur die Werte zwischen $-\pi$ und $+\pi$ zulassen. Nunmehr erweitern wir die Fläche des Bereichs B_n zu einem Windungsflächenstücke W_n erster Ordnung mit dem Punkte α_n als Windungspunkt und dem zweifach durchlaufen zu denkenden Einheitskreise als Begrenzungslinie. Die Fläche W_n ist ebenso wie B_n einfach zusammenhängend. Die in B_n als Teil enthaltene Kreisfläche K_n ist ebenfalls nur ein einfach zusammenhängender Teil von W_n. Das Richtungselement R denken wir uns in B_n markiert, nicht jedoch in dem zweiten Blatte der Fläche W_n*).

*) Man kann an Stelle eines Windungsflächenstücks erster Ordnung auch ein solches ν-ter Ordnung oder ein solches unendlich hoher Ordnung treten lassen. Die nachfolgenden Beweisführungen bleiben dabei voll in Geltung.

Die n-te Schmiegungsoperation, d. i. diejenige, welche den Bereich B_{n+1} aus B_n entstehen läßt, ist nun definiert als diejenige Abbildungsoperation, durch welche die Fläche W_n eineindeutig konform auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet wird mit der Nebenbedingung, daß das Richtungselement R festbleiben soll. Diese Abbildungsfunktion $z_{n+1} \equiv \varphi_n(z_n)$ ist elementar und wird einfach durch Komposition bestimmt. Es wird zunächst durch lineare Transformation das Innere des Einheitskreises so auf sich abgebildet, daß der Punkt α_n in den Nullpunkt übergeht, eine lineare Transformation, die man ihrerseits noch zerlegen kann in eine Drehung um den Nullpunkt zur Überführung des Punktes α_n in einen Punkt der positiv reellen Halbachse und eine darauffolgende reelle lineare Transformation. Die Fläche W_n mit dem Richtungselement R geht bei der genannten Transformation in eine Fläche W_n' mit dem Nullpunkt als Windungspunkt und dem nicht mehr am Nullpunkt befindlichen Richtungselement R_n' über. Nunmehr wird die Fläche W_n' mittelst einer Quadratwurzeloperation auf die schlichte Fläche des Einheitskreises abgebildet, wobei der Nullpunkt festbleibt und das Richtungselement R_n' in ein Richtungselement R_n'' übergeht. Schließlich wird durch nochmalige Anwendung einer linearen Transformation die schlichte Fläche des Einheitskreises so auf sich abgebildet, daß das Richtungselement R_n'' in R übergeht.

Die in der angegebenen Weise aufgebaute Abbildungsfunktion $\varphi_n(z_n)$ besitzt eine Umkehrungsfunktion $z_n \equiv \psi_n(z_{n+1})$, welche offenbar eine rationale Funktion zweiten Grades ist, die innerhalb des Einheitskreises an zwei voneinander verschiedenen Stellen, deren eine der Nullpunkt ist, verschwindet und außerhalb des Einheitskreises nicht verschwindet, auf der Peripherie des Einheitskreises nur Werte vom absoluten Betrage 1 annimmt. Der Quotient $\frac{z_n}{z_{n+1}}$ ist eine rationale Funktion von z_{n+1}, welche innerhalb des Einheitskreises das Maximum ihres absoluten Betrages auf der Peripherie des Einheitskreises erlangt, nämlich 1. Es ist demnach $\left|\frac{z_n}{z_{n+1}}\right| < 1$ für alle Stellen innerhalb des Einheitskreises, die nicht auf der Peripherie des Einheitskreises liegen, so daß wir sagen können: Bei der durch die Funktion $\varphi_n(z_n)$ vermittelten konformen Abbildung des Bereichs B_n auf den Bereich B_{n+1} werden alle Punkte des Bereichs B_n in größere Entfernung vom Nullpunkt gerückt, mit Ausnahme des festbleibenden Nullpunktes und mit

Ausnahme der etwa vorhandenen Grenzpunkte des Bereichs B_n, welche auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Die soeben angestellten Betrachtungen lehren uns bereits, daß

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_n| < |\alpha_{n+1}| < \cdots$$

ist und mithin

$$\delta_1 > \delta_2 > \cdots > \delta_n > \delta_{n+1} > \cdots .$$

Die weitergehende noch zu begründende Tatsache ist folgende:

$$\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n=\infty} \delta_n = 0.$$

Um sie zu begründen, definieren wir eine Hilfsfunktion $\sigma(\varrho)$, welche für $0 < \varrho < 1$ als eine beständig positive (> 0) und stetige Funktion erklärt werden wird, für welche außerdem $\lim_{\varrho=1} \sigma(\varrho) = 0$ ist. Wir gelangen zur Funktion $\sigma(\varrho)$, indem wir die Fläche des Kreises $\varkappa_\varrho$ mit dem Radius ϱ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt nach der obigen Methode konform abbilden, indem wir den Windungspunkt erster Ordnung in irgendeinen Punkt der Peripherie des Kreises $\varkappa_\varrho$ verlegen. Die Kreisfläche $\varkappa_\varrho$ wird dadurch auf einen einfach zusammenhängenden Bereich $\varkappa'_\varrho$ abgebildet, dessen Begrenzungslinie λ_ϱ vollständig außerhalb $\varkappa_\varrho$ verläuft, diese Kreislinie einfach umschlingend und sie dabei in keinem Punkte berührend. Ist ξ_ϱ der dem Nullpunkt am nächsten liegende Punkt der Linie λ_ϱ, so wird

$$\sigma(\varrho) = |\xi_\varrho| - \varrho$$

definiert. Wählen wir irgendein nicht bis zum Nullpunkte und auch nicht bis zum Punkte 1 sich erstreckendes Intervall auf der Strecke 0 bis 1, so kann man für dieses Intervall behaupten, daß die Funktion $\sigma(\varrho)$, die offenbar stetig ist, ihren Werten nach oberhalb einer endlichen Größe m bleibt, die ihrerseits größer als Null ist.

Zur näheren numerischen Bestimmung einer solchen unteren Schranke m dienen folgende Bemerkungen. Die Funktion, welche die konforme Abbildung des im Punkte $+\varrho$ verzweigten Windungsflächenstücks W im wiederholt angegebenen Sinne auf die schlichte Fläche des Einheitskreises leistet, werde mit $Z = H(z)$ bezeichnet, der für $z = 0$ den Wert Null annehmende Hauptzweig mit $h(z)$. Alsdann behaupten wir, daß das Minimum M_ϱ der Funktion $|h(z)|$ für die durch $|z| = \varrho$ im Hauptblatte von W erklärte Kreislinie $\varkappa$ den Wert $|h(-\varrho)| = -h(-\varrho)$ hat.

Die Behauptung ergibt sich so: Die Funktion $\left(\log \frac{1}{|H(z)|} - \log \frac{1}{|z|}\right)$ ist die zu W gehörende, am Rande verschwindende, im Nullpunkte des

zweiten Blattes von W unendlich werdende *Green*sche Funktion des Gebiets W und werde als solche mit $G(z)$ bezeichnet. Unsere obige Behauptung ist gleichbedeutend mit der, daß das Minimum γ der von $G(z)$ auf $\varkappa$ angenommenen Werte im Punkte $(-\varrho)$ und nur in diesem angenommen wird.

Um letztere Behauptung zu erweisen, denken wir uns die Fläche W auf die schlichte Fläche eines Z'-Einheitskreises so abgebildet, daß der Windungspunkt ϱ in den Nullpunkt übergeht, die beiden Punkte $z=0$ in Punkte $\mp\beta$ $(\beta>0)$, die beiden Punkte $-\varrho$ in Punkte $\mp\alpha$ $(\alpha>0)$, die beiden Kreislinien $|z|=\varrho$ in die linke und rechte Hälfte einer durch die Punkte $-\alpha$, 0, $+\alpha$ gehenden Lemniskate. Unsere Funktion $G(z)$, in die Z'-Ebene überpflanzt, wird zur *Green*schen Funktion $J'(Z')$ des Z'-Einheitskreises mit dem Punkte $+\beta$ als Unendlichkeitsstelle. Die Niveaulinien der Funktion $J'(Z')$ bilden eine Kreisschaar, deren durch $-\alpha$ hindurchgehender, eindeutig bestimmter Kreis K offenbar den durch α und $-\alpha$ hindurchgehenden, den Nullpunkt zum Mittelpunkt habenden Kreis K' umschließt, denselben nur im Punkte $-\alpha$ berührend. Der Kreis K' seinerseits umschließt vollständig die Lemniskate, dieselbe nur in den beiden Punkten α und $-\alpha$ berührend. Q. e. d.

Wir fügen noch hinzu, daß die Größe $\frac{M_\varrho}{\varrho}$ von $+\infty$ monoton bis $+1$ abnimmt, wenn ϱ beständig zunehmend von 0 bis $+1$ variiert. Dabei variiert nämlich der Punkt $-\alpha$ der Z'-Ebene monoton abnehmend von 0 bis (-1), der Punkt β monoton zunehmend von 0 bis 1. Die Größe $\log\frac{M_\varrho}{\varrho}$ ist nun aber gleich $J'(Z')_{Z'=-\alpha}$.

Nunmehr kehren wir zu unseren Bereichen B_n und zu den Punkten α_n zurück. Wir sehen jetzt unmittelbar, daß

$$|\alpha_{n+1}|-|\alpha_n|\geqq\sigma(|\alpha_n|)$$

ist; denn der Bereich B_n enthält die Kreisfläche $K_n\equiv\varkappa_{|\alpha_n|}$ als Teil in sich. Es sei nun γ irgendeine reelle positive Größe oberhalb $|\alpha_1|$, jedoch unterhalb Eins. Wir bezeichnen mit M_γ das Minimum der Funktion $\sigma(\varrho)$ für das Intervall von $|\alpha_1|$ bis γ. Ferner bezeichnen wir mit E_γ die größte in $\frac{\gamma-\alpha_1}{M_\gamma}$ enthaltene ganze Zahl. Alsdann behaupten wir, daß $|\alpha_n|>\gamma$ ist für alle $n>E_\gamma$. In der Tat wird ja beim Übergange von α_1 zu α_2

$$|\alpha_2| - |\alpha_1| > \sigma(|\alpha_1|) > M_\gamma$$

sein, ebenso

$$|\alpha_3| - |\alpha_2| > M_\gamma$$

usw., so daß wir nach der angegebenen Anzahl von Schritten notwendig mit $|\alpha_n|$ über γ hinauskommen. Hiermit ist vollständig dargetan, daß unser Schmiegungsverfahren nach und nach eine vollständige Anschmiegung der Begrenzungslinie an die Peripherie des Einheitskreises bewirkt.

§ 3.

Die gleichmäßige Konvergenz der Größen $|z_n|$ bzw. $\log|z_n|$.

Wir betrachten nunmehr z_n als Funktion von z_1 und bezeichnen diese Funktion mit $f_n(z_1)$. Alsdann gilt es zu zeigen, daß die Folge der Funktionen $f_n(z_1)$ $[n = 1, 2, 3, \ldots]$ in B_1, d. i., präziser ausgedrückt, in jedem inneren, nicht bis an die Grenze von B_1 sich erstreckenden Teilbezirke β von B_1 gleichmäßig konvergiert.

Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $|f_n(z_1)|$ in dem erwähnten Bezirke β. Diese ergibt sich folgendermaßen. Es ist in β

$$|z_{n+m}| \geqq |z_n|,$$

und ferner hat man

$$\left|\frac{z_{n+m}}{z_n}\right| < \frac{1}{|\alpha_n|},$$

weil der Quotient $\frac{z_{n+m}}{z_n}$, wie oben erwähnt, in B_1 regulär ist und daher dem Maximum seines absoluten Betrages bei Annäherung an die Grenze von B_1 zustrebt, wobei $|z_{n+m}|$ jedenfalls kleiner als 1 bleibt, während $|z_n|$ im Sinne einer Verkleinerung durch eine beliebig wenig unterhalb $|\alpha_n|$ befindliche positive Größe ersetzt werden kann. Setzen wir jetzt $\frac{1}{|\alpha_n|} = 1 + \eta_n$, unter η_n eine positive, bei unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werdende Größe verstehend, so haben wir

$$|z_{n+m}| \leqq (1 + \eta_n)|z_n|$$

und daher wegen $|z_n| \leqq 1$

$$(*) \qquad |z_{n+m}| - |z_n| \leqq \eta_n.$$

Hiermit aber ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen $|f_n(z_1)|$ nicht nur für jeden Bezirk β, sondern sofort für den ganzen Bereich B_1 dargetan.

Es handelt sich nunmehr darum, den Übergang von der Abschätzungsrelation (*) zu einer Abschätzungsrelation für die Differenz $z_{n+m} - z_n$ zu machen, welche für jeden Bereich β gültig sein muß. Um zu dem genannten Ziele zu gelangen, genügt es, den Nachweis zu führen, daß in β nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Größe ε

$$\left| \frac{z_{n+m}}{z_n} - 1 \right| < \varepsilon$$

gemacht werden kann, indem man nur n hinreichend groß wählt. Denn man kann dann setzen

$$\frac{z_{n+m}}{z_n} = 1 + \eta_{n,m},$$

wobei mit $\eta_{n,m}$ eine in β mit unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig unendlich klein werdende Größe bezeichnet wird, und von da aus bei Berücksichtigung von $|z_n| < 1$ schließen

$$|z_{n+m} - z_n| < |\eta_{n,m}|.$$

Von der somit jetzt zu untersuchenden Funktion $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ ist bekannt, daß sie dem absoluten Betrage nach für das ganze Gebiet B_1 gleich $1 + \eta'_{n,m}$ gesetzt werden kann, unter $\eta'_{n,m}$ eine in B_1 erklärte reelle positive und zugleich mit n gleichmäßig unendlich klein werdende Funktion verstanden; ferner, daß sie im Nullpunkt reell positiv ist. Auch die Funktion $\log \frac{z_{n+m}}{z_n}$ ist in B_1 vollständig regulär erklärt, sofern wir noch festsetzen, sie solle im Nullpunkt einen reellen Wert haben, der hier positiv reell wird. Jetzt wird der reelle Teil dieser Funktion, d. i. die Größe $\log \left| \frac{z_{n+m}}{z_n} \right| \equiv \log |z_{n+m}| - \log |z_n|$ betrachtet. Wegen $\log x < x - 1$ für $x > 1$ ist

$$\log \left| \frac{z_{n+m}}{z_n} \right| < \frac{z_{n+m}}{z_n} - 1 < \frac{1}{|\alpha_n|} - 1 = \eta_n.$$

Wir sind somit sicher, daß im ganzen Bereiche B_1 die Funktion $\Re \log \frac{z_{n+m}}{z_n} \equiv \Re \Phi_{n,m}(z_1)$ beliebig klein wird, wenn nur n hinreichend groß gewählt wird. Es handelt sich jetzt nur noch darum, einen Schluß auf das Unendlichkleinwerden auch des imaginären Teiles unter den erwähnten Umständen zu machen, und zwar letzteren Schluß für β. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz.

§ 4.

Herleitung eines Hilfssatzes.

Hilfssatz: Es sei $f(z)$ eine für $|z| < R$ regulär erklärte, für $z = 0$ den Wert Null annehmende analytische Funktion, und es sei für denselben Bezirk $-\mu < \Re f(z) < +\mu$. Alsdann liegt, für einen Bezirk $|z| \leqq R' < R$ der imaginäre Teil von $f(z)$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer Größe $\mu \cdot Q$, wobei Q reell positiv ist und nur von dem Verhältnis $\frac{R'}{R}$, nicht jedoch von der Wahl der Funktion $f(z)$ abhängt.

Wir gelangen in einfachster Weise zu einer sofort die äußersten Schranken in Evidenz setzenden Abschätzung der gewünschten Art unter Zuhilfenahme eines *Schwarz*schen Lemmas, dessen Grundgedanken wir bereits oben Seite 185 zur Anwendung gebracht haben. Das *Schwarz*sche Lemma besagt folgendes:

*Schwarz*sches Lemma*): Ist $F(z)$ eine für $|z| < 1$ reguläre, im Punkte $z = 0$ selbst den Wert Null annehmende analytische Funktion, welche das Innere des Einheitskreises konform auf ein Gebiet innerhalb des Einheitskreises abbildet, so wird durch diese Funktion die Fläche des durch die Ungleichheit $|z| \leqq \varrho < 1$ definierten Kreises K_ϱ konform abgebildet auf ein Gebiet, welches ganz im Kreise K_ϱ liegt. —

Der äußerst einfache Beweis geht so: $\frac{F(z)}{z}$ ist für $|z| < 1$ regulär und dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$, weil nach der Peripherie des Einheitskreises hin $|z| = 1$ wird, während $|F(z)| \leqq 1$ bleibt; daher $|F(z)| \leqq |z|$. Das Maximum 1 für $\left|\frac{F(z)}{z}\right|$ kann nur dann für ein z erreicht werden, wenn $\frac{F(z)}{z}$ eine Konstante ist, also $F(z)$ geometrisch eine Drehung darstellt, q. e. d.

Nunmehr bedarf es nur einer einfachen logarithmischen Transformation, um zu der für unsern eigentlich zu beweisenden Hilfssatz in Betracht kommenden charakteristischen Figur zu gelangen. Die Bedingung nämlich, daß $-\mu < \Re f(z) < \mu$ sein soll, kann durch Betrachtung der Funktion $\frac{f(z)}{\mu}$ an Stelle von $f(z)$ auf die speziellere Bedingung $-1 < \Re f(z) < 1$

---

*) *H. A. Schwarz:* „Zur Theorie der Abbildung.“ (Züricher Progamm 1869/70 = Ges. Abh. Bd. II. S. 108 ff.) Das Lemma findet auch bei *Carathéodory* vielfältige Verwendung. Vgl. z. B. Math. Ann. Bd. 72, S. 107 ff.

reduziert werden. Geometrisch bedeutet dies, daß die Werte $f(z)$ in ihrer Variabilität auf die Fläche eines unendlichen Parallelstreifens beschränkt sind, dessen begrenzende Geraden parallel der Achse des Imaginären im Abstande 1 von derselben verlaufen. Wird jetzt die Fläche dieses Parallelstreifens mittelst einer Exponentialfunktion auf die Fläche des Einheitskreises so abgebildet, daß die Punkte -1 und $+1$ fest bleiben, während die beiden unendlich fernen Punkte des Parallelstreifens in die Punkte $+i$ und $-i$ übergehen, so ergibt sich aus $f(z)$ durch Zusammensetzung mit der genannten Hilfsabbildung eine Funktion $F(z)$, welche für $z=0$ verschwindet und für $|z|<R$ dem absoluten Betrage nach unterhalb 1 bleibt, daher nach dem *Schwarz*schen Lemma für $z\leqq R'$ dem absoluten Betrage nach unterhalb $\frac{R'}{R}$. Dieser Einschränkung der Werte von $F(z)$ auf die Fläche des Kreises mit dem Radius $\frac{R'}{R}$ entspricht eine Beschränkung der Werte von $f(z)$ auf die Fläche einer ganz im Innern des Parallelstreifens enthaltenen konvexen Kurve mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt, deren am weitesten nach rechts und links liegende Punkte, die Durchschnittspunkte mit der Achse des Reellen sind, während der höchste und tiefste Punkt die Durchschnittspunkte mit der Achse des Imaginären sind, wie sich unmittelbar aus dem Umstande ergibt, daß den von $+i$ nach $-i$ führenden Kreisbögen die unendlichen geraden Linien des Parallelstreifens entsprechen, welche mit der konvexen Kurve wegen der Konformität der Abbildung dieselben Winkel einschließen wie der betreffende Kreisbogen der F-Ebene mit dem Kreise vom Radius $\frac{R'}{R}$. Die Höhe des obersten Punktes unserer konvexen Kurve über der Achse des Reellen möge mit Q bezeichnet werden. Es ist dies die Größe Q, deren Existenz in unserem oben formulierten, hiermit bewiesenen Hilfssatz behauptet worden ist*). Wir finden

$$Q=\frac{2}{\pi}\log\frac{R+R'}{R-R'}.$$

Beiläufig bemerkt, ergibt unsere Beweismethode sofort noch folgenden

*) Der am weitesten nach rechts und links liegende Punkt der konvexen Kurve liegt, wie erwähnt, auf der Achse des Reellen, und zwar im Abstande $\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}$. Hiermit ist eine von *Schwarz* aus dem *Poisson*schen Integral gefolgerte, von ihm beim alternierenden Verfahren („gürtelförmige Verschmelzung") benutzte Relation für Potentiale bewiesen, nämlich

$$-\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}<\Re f(z)<+\frac{4\mu}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{R'}{R}.$$

Zusatz zum Hilfssatz: Der imaginäre Teil von $f(z)$ erreicht den äußersten Wert $\mu \cdot Q$ seines absoluten Betrages dann und nur dann, wenn $f(z)$ die konforme Abbildung des Kreises $|z| < R$ auf das Innere des Parallelstreifens vermittelt, welcher begrenzt wird von den beiden Parallelen im Abstande μ zur Achse des Imaginären. Die Funktion $f(z)$ hat dann die Form

$$f(z) = \frac{2\mu}{i\pi} \log \frac{iR - z}{iR + z},$$

in welcher noch z durch $e^{i\alpha} z$ (α reell) ersetzt werden kann.

Bei der sogleich vorzunehmenden Anwendung des Hilfssatzes kommt derselbe in folgender Fassung in Betracht:

Hilfssatz: Ist $f(z)$ für $|z| < R$ regulär erklärt und ist die Schwankung des reellen Teiles dieser Funktion in demselben Bezirke $\leqq \mu$, so ist die Schwankung des imaginären Teiles in dem Bezirke $|z| \leqq R' < R$ kleiner als $2\mu Q$. Als Schwankung einer reellen Funktion in einem Gebiet wird hierbei der Unterschied zwischen algebraisch größtem und kleinstem Werte derselben bezeichnet, bzw. der Unterschied zwischen der oberen und unteren Grenze der Funktionswerte in dem Gebiet.

§ 5.

Zuendeführung des Konvergenzbeweises. Nähere Untersuchung der Grenzabbildung.

Der § 4 begonnene Konvergenzbeweis geht nunmehr folgendermaßen zu Ende. Wir bezeichnen mit β' einen aus lauter gleich großen Quadraten der Seitenlänge a aufgebauten, einfach zusammenhängenden Teilbereich von B_1, der den Bereich β enthält und dessen Begrenzung weder mit der Begrenzung von β noch mit der Begrenzung von B_1 einen Punkt gemeinschaftlich hat. Ein solcher Bereich β' läßt sich natürlich mit Leichtigkeit bestimmen und man kann dabei noch der Nebenbedingung genügen, daß der kürzeste Abstand der Begrenzungslinien von β' und B_1 oberhalb $a\sqrt{2}$, d. i. oberhalb der Diagonalenlänge des Quadrates liegt. Man hat dazu nur nötig a hinreichend klein zu wählen.

Es genügt, da der zu untersuchende imaginäre Teil der Funktion $\log \frac{z_{n+m}}{z_n} \equiv \Phi_{n,m}(z_1)$, d. i. die Größe Am $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ *) im Nullpunkt verschwindet,

*) Am $\equiv$ Amplitude von.

die Schwankung dieses imaginären Teiles im Bezirke β abzuschätzen, welche wiederum kleiner ist als die Schwankung des imaginären Teiles in dem Bereiche β'. Die Schwankung in β' ist nun kleiner als die Summe der Schwankungen in den einzelnen Quadraten von β'. Ist N die Anzahl dieser Quadrate, so wird mithin die Schwankung des imaginären Teiles $< N \cdot \Delta$ sein, wenn Δ eine für alle N Quadrate des Bereichs β' gültige, noch herzuleitende obere Schranke der Schwankung des imaginären Teiles ist. Nun kann nach dem zweiten Hilfssatz $\Delta < Q\bar{\Delta}$ gesetzt werden, unter $\bar{\Delta}$ die mit wachsendem n unendlich klein werdende Schwankung des reellen Teiles in B verstanden. In der Tat kann man den Mittelpunkt eines einzelnen Quadrates zum Zentrum eines Kreises vom Radius $R = a$ wählen und einen zu ersterem konzentrischen Kreis vom Radius $R' = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ konstruieren, dessen Peripherie durch die Ecken des betreffenden Quadrates hindurchgeht. Damit ist bewiesen, daß die Größe Am $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ in β gleichmäßig unendlich klein wird, wenn n unendlich groß wird. Andererseits näherte sich $\left|\frac{z_{n+m}}{z_n}\right|$ gleichmäßig dem Werte 1, so daß nun die Größe $\frac{z_{n+m}}{z_n}$ selbst in β gleichmäßig gegen 1 konvergiert, mithin $f_n(z_1)$ in β gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$.

Die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ kann sich übrigens nicht auf eine Konstante reduzieren; denn sie verschwindet im Nullpunkt wie jede der Näherungsfunktionen $f_n(z_1)$, in einem von Null verschiedenen Punkte jedoch ist ihr absoluter Wert größer als der jeder Näherungsfunktion, also von Null verschieden. Es ist ferner einleuchtend, daß der absolute Betrag der Grenzfunktion an jeder Stelle des Bereichs B_1 kleiner als 1 ist. Denn jedenfalls kann er nicht größer sein, weil der absolute Betrag jeder Näherungsfunktion kleiner als 1 ist, und die Übereinstimmung 1 wird durch den Satz ausgeschlossen, daß eine von einer Konstanten verschiedene reguläre analytische Funktion an einer regulären Stelle kein Maximum ihres absoluten Betrages haben kann.

Wir haben uns noch zu überlegen, was allerdings jetzt keine Schwierigkeit mehr haben wird, ob, wie es sein soll, die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ eine *eineindeutige* konforme Abbildung des Bereichs B_1 auf das *vollständige* Innere des Einheitskreises leistet.

Was zunächst den ersten Punkt, nämlich die Eineindeutigkeit, anbetrifft, so ergibt sich dieselbe aus dem entsprechenden Abbildungscharakter der Näherungsfunktionen. Nehmen wir etwa an, die Funktion $f_\infty(z_1)$ habe an zwei voneinander verschiedenen Stellen z_1' und z_2'' in B_1 denselben Wert, d. h. $f_\infty(z_1') = f_\infty(z_1'') = a$. Alsdann wird eine Umgebung von z_1' und eine Umgebung von z_1'' je auf eine Umgebung von a abgebildet, woraus ersichtlich ist, daß man, falls nicht bereits die Werte der Ableitungen $f_\infty'(z_1')$ und $f_\infty'(z_1'')$ von Null verschieden sind, das Paar z_1', z_1'' durch ein benachbartes ersetzen kann, für welches die Bedingung des Nichtverschwindens der Ableitungen zutrifft. Nehmen wir also z_1' und z_1'' in dieser Weise an.

Wir konstruieren um z_1' und z_1'' als Mittelpunkte je einen Kreis vom Radius ϱ, genannt $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, und wählen ϱ so klein, daß $f_\infty(z_1)$ innerhalb und auf der Grenze jeder dieser Kreisflächen keinen Wert zweimal annimmt. Die Kreisflächen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ werden dann durch Vermittlung der Funktion $f_\infty(z_1)$ auf schlichte Gebiete, γ_1 und γ_2, abgebildet, welche beide den Punkt a in ihrem Innern enthalten. Jetzt bezeichnen wir mit $\varkappa$ die größte in γ_1 und γ_2 enthaltene Kreisfläche mit a als Mittelpunkt. Der Radius derselben wird mit ϱ' bezeichnet. Die Umkehrungsfunktion der Funktion $f_\infty(z_1)$ wäre nun in $\varkappa$ eine mindestens zweideutige analytische Funktion. Allerdings hängen die beiden von uns betrachteten Zweige dieser Umkehrungsfunktion durch analytische Fortsetzung innerhalb $\varkappa$ selbst nicht zusammen. Nunmehr denken wir uns eine der Näherungsfunktionen $f_n(z_1)$ bestimmt, welche in einem Teilbezirke β von B_1, der die Kreisflächen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ vollständig enthält, die Funktion $f_\infty(z_1)$ bis auf eine Größe approximiert, die kleiner ist als $\frac{\varrho'}{3}$. Das jedenfalls schlichte Bild, welches diese Funktion von $\varkappa_1$ entwirft, wird ein Flächenstück sein, dessen vollständige Begrenzung außerhalb des mit dem Radius $\frac{2\varrho'}{3}$ um a als Mittelpunkt beschriebenen Kreises verläuft, und welches daher das Innere desselben Kreises vollständig schlicht bedecken muß, weil jedenfalls $f_n(z_1')$ sich von a um weniger als $\frac{\varrho'}{3}$ unterscheidet und folglich in dem erwähnten Kreise liegt. Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß das Bild, welches die Funktion $f_n(z_1)$ von der Kreisfläche $\varkappa_2$ entwirft, die genannte Kreisfläche vom Radius $\frac{2}{3}\varrho'$ vollständig bedeckt. Das ist aber ein Widerspruch gegen

die Tatsache, daß $f_n(z_1)$ niemals an zwei voneinander verschiedenen Stellen des Bereichs B_1 einen und denselben Wert annimmt.

Es steht mithin jetzt fest, daß die Grenzfunktion $f_\infty(z_1)$ in B_1 keinen Wert mehr als einmal annimmt und also ein schlichtes Bild des Bereichs B_1 auf ein Flächenstück innerhalb des Einheitskreises liefert. Daß dieses Flächenstück das ganze Innere des Einheitskreises ist, bedarf noch einer weiteren Prüfung.

Zum Zwecke dieses Nachweises wird ein Kreis K_r mit dem Radius $r < 1$ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt innerhalb des Einheitskreises konstruiert. r kann dabei insbesondere beliebig nahe an 1 gewählt sein. Um zu zeigen, daß das von $f_\infty(z_1)$ entworfene Bild des Bereichs B_1 die Fläche des Einheitskreises vollständig ausfüllt, wäre der Nachweis zu führen, daß es jede Kreisfäche K_r vollständig bedeckt. Um dieses nun zu erkennen, gehen wir in der Folge der Näherungsfunktion $f_n(z_1)$ und damit der Näherungsbereiche B_n soweit, daß B_n und folglich alle Bereiche mit höherem Index die Fläche des Kreises K_r vollständig enthalten. Sei B_{n_0} der erste, so bestimmte Bereich in der Folge, dessen Begrenzung übrigens mit K_r keinen Punkt gemeinschaftlich haben soll. Wir konstruieren in B_{n_0} einen mit K_r konzentrischen Kreis $K_{r'}$ mit einem Radius $r' > r$. Der Kreislinie $K_{r'}$ entspricht in B_1 eine geschlossene reguläre analytische Linie L, welche einen Teilbereich von B_1 begrenzt. Es ist nun einleuchtend, daß das Bild, welches die Funktion $f_\infty(z_1)$ von der Linie L entwirft, eine Kurve innerhalb des Einheitskreises sein wird, welche ganz außerhalb von K_r verläuft. Die Fläche B_1 wird daher notwendig auf einen schlichten Teilbereich des Einheitskreises abgebildet, der die Kreisfläche K_r vollständig enthält. Denn dieser Bildbereich hat ja innerhalb K_r keine Grenzpunkte.

C. Zweiter Teil.

Konforme Abbildung des allgemeinsten zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

§ 6.

Abbildung von Kreisringflächen aufeinander.

Wir verstehen unter einem *Kreisring* einen zweifach zusammenhängenden Bereich, welcher von zwei zueinander konzentrischen Kreisen,

einem äußeren und einem inneren, begrenzt wird. Einen solchen Kreisring nennen wir einen *einfach ausgearteten Kreisring*, wenn der innere oder äußere Begrenzungskreis sich auf einen Punkt reduziert, der dann der Mittelpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt wäre. Wir nennen ihn *zweifach ausgeartet*, wenn beide Kreise sich auf Punkte reduzieren, etwa auf den Nullpunkt als den inneren und den unendlich fernen Punkt als äußeren Begrenzungskreis. Einen nicht ausgearteten Kreisring bezeichnen wir auch als *gewöhnlichen Kreisring*.

Wir untersuchen zunächst die Frage der eineindeutigen konformen Abbildung zweier Kreisringe aufeinander bzw. auf sich selbst, wobei wir eine solche Abbildung in der Voraussetzung immer nur für die inneren Punkte (nicht Grenzpunkte) des Bereichs erklärt denken.

Wir zeigen zunächst, daß die drei Typen im Sinne der konformen Abbildung nicht aufeinander bezogen werden können, d. h.: Es ist unmöglich, einen gewöhnlichen Kreisring auf einen ausgearteten Kreisring abzubilden, und es ist unmöglich, einen einfach ausgearteten Kreisring auf einen zweifach ausgearteten Kreisring abzubilden.

Gehen wir etwa vom zweifach ausgearteten Kreisring aus und bezeichnen wir mit $z' \equiv f(z)$ eine analytische Funktion, durch deren Vermittelung dieser Kreisring eineindeutig konform auf einen einfach ausgearteten Kreisring mit dem Nullpunkt als isoliertem Begrenzungspunkt oder auf einen gewöhnlichen Kreisring abgebildet wird. Wir betrachten dann die sich ergebende Funktion $z' = \varphi(\zeta)$, wenn man setzt $\log z = \zeta$. Die Funktion $\varphi(\zeta)$ ist eine für alle endlichen ζ regulär erklärte analytische Funktion, welche dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke bleibt. Eine solche Funktion muß sich auf eine Konstante reduzieren*).

Es bleibt noch die Unmöglichkeit der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisrings auf einen einfach ausgearteten Kreisring zu zeigen. Es werde zu dem Zwecke die Existenz einer derartigen Abbildungsfunktion $z' = f(z)$ angenommen, und zwar möge z im einfach ausgearteten, z' im gewöhnlichen Kreisringe variieren. Wir setzen $\zeta = \log z$ und $\zeta' = \log z'$ und betrachten die Funktion $\zeta' = \varphi(\zeta)$, welche eine konforme Abbildung einer

*) Vgl. oben S. 181.

Halbebene auf einen Parallelstreifen vermittelt. Der Charakter der Abbildung ist, wenn wir die Halbebene als die linke Halbebene, den Parallelstreifen jedoch parallel zur Achse des Imaginären, und zwar von der Achse des Imaginären selbst und einer Parallelen links im Abstande π begrenzt annehmen, von der Art, daß jedesmal, wenn der reelle Teil von ζ negativ unendlich groß wird, der reelle Teil von ζ' sich unbegrenzt $-\pi$ nähert und umgekehrt. Bildet man jetzt den Parallelstreifen mittelst der Funktion $Z' = e^{\frac{1}{i}\zeta'}$ auf die obere Halbebene ab, so wird $Z'(\zeta)$ eine Funktion, welche eine Halbebene in eine Halbebene transformiert, also eine lineare Funktion, welche wegen des geschilderten, auf die neuen Verhältnisse sofort übertragbaren Abbildungscharakters dem Punkte $\zeta = \infty$ alle Punkte der negativ reellen Z'-Halbachse entsprechen lassen müßte, was sinnwidrig ist.

Zum Schlusse bleibt zu zeigen, daß zwei gewöhnliche, konzentrisch liegend vorgestellte Kreisringe dann und nur dann eineindeutig aufeinander abbildbar sind, wenn sie dasselbe Radienverhältnis besitzen, und daß in einem solchen Falle die Abbildung entweder eine gewöhnliche Ähnlichkeitstransformation mit dem Mittelpunkt als Fixpunkt ist oder eine mit einer Spiegelung an irgendeinem konzentrischen Kreise zusammengesetzte indirekte Ähnlichkeitstransformation, die ihrerseits den Mittelpunkt fest läßt, welcher im folgenden mit dem Nullpunkte zusammenfallend angenommen werde.

Zum Beweise können wir annehmen, daß bei einer vorgestellten Abbildung der beiden gewöhnlichen Kreisringe durch eine Funktion $z' = f(z)$ der äußere Kreis dem äußeren, der innere dem inneren entsprechen möge in dem Sinne, daß jeder unbegrenzten Annäherung an den äußeren Kreis des z-Kreisringes eine unbegrenzte Annäherung an den äußeren Kreis des z'-Kreisringes entspreche und das Analoge für die inneren Begrenzungskreise gilt. Wäre dies nicht der Fall, so brauchen wir nur mit dem einen Kreisringe eine lineare Transformation vorzunehmen, bestehend aus einer Spiegelung an einem Begrenzungskreise mit nachfolgender Spiegelung an der Achse des Reellen. Wir können weiter annehmen, daß bei beiden Kreisringen der äußere Begrenzungskreis der Einheitskreis ist. Gehen wir jetzt wieder zu den Größen $\zeta = \log z$ und $\zeta' = \log z'$ über, so ergeben sich als Bilder der Kreisringe zwei Parallelstreifen zur Achse des Imaginären von

der Breite $\log q$ bzw. $\log q'$, wenn q und q' die Radien der inneren Begrenzungskreise sind. Diese beiden Streifen erscheinen nun durch eine konforme Abbildung, und zwar in der Weise aufeinander bezogen, daß die beiden unendlich fernen Zipfel des einen Streifens den beiden unendlich fernen Zipfeln des andern entsprechen, und zwar der obere dem oberen, der untere dem unteren. Die Funktion $Z = e^{i\zeta \frac{\pi}{\log q}}$ und $Z' = e^{i\zeta' \frac{\pi}{\log q'}}$ vermitteln konforme Abbildungen der beiden Streifen auf die untere Z- bzw. Z'-Halbebene, und wir haben nun eine eineindeutige Beziehung dieser Halbebenen aufeinander, welche so beschaffen ist, daß der unbegrenzten Annäherung an den Nullpunkt die unbegrenzte Annäherung an den Nullpunkt entspricht und das Analoge für den unendlich fernen Punkt gilt. Das heißt aber, daß die Funktion $Z'(Z)$, die doch nun eine reelle lineare Funktion sein muß, die Form $Z' = cZ$ hat, unter c eine reelle positive Konstante verstanden. Dies ergibt nun sofort die Beziehung der beiden Kreisringe aufeinander in der Gestalt

$$(*) \qquad z' = C z'',$$

wobei C eine Konstante ist und μ den reellen positiven Wert $\frac{\log q'}{\log q}$ hat. Nun ist aber klar, daß im vorliegenden Falle $\mu = 1$ sein muß, weil einer einfachen Umlaufung des Nullpunktes der z-Ebene eine einfache Umlaufung desselben in der z'-Ebene entsprechen soll. Damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Es ist von Interesse, noch einen anderen Beweis des letzten Satzes, insbesondere mit Bezug auf die gewöhnlichen Kreisringflächen, kennen zu lernen, welcher ebenfalls rein funktiontheoretisch verläuft und vollständig auf den Prinzipien der Potenzreihen aufgebaut ist, insbesondere den Integralbegriff nicht benutzt. Wir betrachten die Funktion $\log |z'| = \Re \log (z')$ als Funktion im z-Kreisringe. Sie nimmt auf dem Einheitskreise den Wert Null, auf dem inneren Begrenzungskreise den Wert $\log q'$ an. Dasselbe tut die Funktion $\frac{\log q'}{\log q} \log |z|$. Die Differenz wäre demnach in dem z-Kreisringe eindeutig und auf beiden Begrenzungslinien Null. Dann müßte diese Differenz sich notwendig auf den konstanten Wert Null reduzieren, weil der reelle Teil einer analytischen Funktion an einem regulären Punkte kein Maximum oder Minimum haben kann. Hieraus ergibt sich nun sofort wieder die obige Formel (*).

Die vorstehende Beweismethode ist in folgender Weise auch zum Nachweise der Unmöglichkeit der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisringes auf einen einfach ausgearteten Kreisring brauchbar. Von beiden Kreisringflächen wird angenommen, daß sie den Einheitskreis als äußeren Begrenzungskreis haben und daß der Annäherung an diesen äußeren Kreis in einem Kreisring die Annäherung an denselben im anderen entspricht. Wird der im gewöhnlichen Kreisring variierende Punkt mit z bezeichnet, der vorgestellte Bildpunkt des ausgearteten Kreisrings mit z', so ist die Größe $\log|z'|$ eine im z-Kreisringe eindeutig erklärte Funktion, die auf dem Einheitskreise verschwindet, auf dem inneren Begrenzungskreise vom Radius q jedoch negativ unendlich wird. Dasselbe gilt von der Funktion $\frac{1}{n}\log|z'|$, wenn unter n eine positive ganze Zahl verstanden wird. Bilden wir nun die Funktion

$$\frac{1}{n}\log|z'| - \log|z|.$$

Dieselbe ist im gewöhnlichen Kreisring eindeutig und nimmt auf dem äußeren Kreisringe den Wert Null an, auf dem inneren jedoch wird sie negativ unendlich, woraus folgt, daß sie im ganzen z-Kreisringe negativ ist. Also wäre

$$\frac{1}{n}\log|z'| < \log|z|$$

für jede Wahl von n. Das ist aber sinnwidrig, weil die Größe links für unbegrenzt wachsendes n und festgehaltenes z und damit z' unendlich klein wird.

Mit der Frage der konformen Abbildung zweier Kreisringflächen aufeinander ist auch die Frage nach allen konformen Abbildungen eines Kreisrings auf sich selbst erledigt. Wir erkennen nach der obigen ersten Beweismethode, für welche der Übergang zu den Größen ζ und ζ' charakteristisch war, daß die konforme Abbildung im Falle des einfach ausgearteten Kreisrings die Form hat $z' = az$, wobei noch $|a| = 1$ ist, im Falle des zweifach ausgearteten Kreisrings entweder die Form $z' = a \cdot z$ oder die Form $z' = \frac{a}{z}$, wobei a eine beliebige reelle oder komplexe Zahl ist, im Falle des gewöhnlichen Kreisrings mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 schließlich entweder die Form $z' = az$, wobei wieder $|a| = 1$ sein muß, oder die Form $z' = a\frac{\varrho_1\varrho_2}{z}$, wobei wiederum $|a| = 1$ sein muß. Geometrisch bedeutet die Transformation $z' = \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2}{z}$ die Ausführung einer Spiegelung am Kreise vom

Radius $\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$ (Symmetralkreis des Ringes) mit darauffolgender Spiegelung an der Achse des Reellen.

Übrigens bietet sich zur Erledigung der Frage nach den konformen Abbildungen eines gewöhnlichen Kreisrings auf sich selbst noch der besonders einfache Weg dar: Man bringe die Frage zunächst auf den Fall, daß innerer und äußerer Kreis sich selbst entsprechen. Der Quotient $\left|\frac{f(z)}{z}\right|$ für eine angenommene Abbildungsfunktion $z' = f(z)$ bekommt dann auf beiden Begrenzungskreisen den Wert 1; es ist also $\frac{z'}{z}$ eine Konstante vom absoluten Betrage 1.

Handelt es sich nochmals um die weitergehende Frage der konformen Abbildung eines gewöhnlichen Kreisrings (z-Ebene) auf einen andern gewöhnlichen Kreisring (z'-Ebene), so kann man nun folgendermaßen schließen. Dem Symmetralkreise des z-Kreissrings muß der Symmetralkreis des z'-Kreisrings entsprechen, weil die Spiegelung des z-Kreisringes am Symmetralkreise sich auf den z'-Kreisring als eine indirekt konforme Abbildung desselben auf sich selbst überträgt, welche sich wegen der dabei eintretenden Vertauschung der Begrenzungslinien nach dem unmittelbar vorher Bewiesenen in der Tat als eine Transformation durch reziproke Radien am Symmetralkreise des z'-Ringes ergibt. Nunmehr kann man jeden der vier Ringe, in welche die ursprünglich betrachteten Kreisringe durch die Symmetralkreise zerlegt sind, wieder durch den ihm zugehörenden Symmetralkreis in zwei Ringe zerlegen, wieder das Entsprechen der Symmetralkreise in Original- und Bild-Ebene schließen und so in inf. fortfahrend schließen, daß $|z'| = |z|$" ist usw.

§ 7.

Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

Es handelt sich nunmehr um den Nachweis der Möglichkeit der konformen Abbildung eines beliebig vorgelegten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings.

Sei B ein solcher Bereich, über dessen Begrenzung wir jedoch keinerlei Voraussetzungen machen. Eine Grenze oder beide Grenzen können sich auch auf einen Punkt reduzieren *(einfach bzw. zweifach ausgearteter*

Bereich). Gewisse Vereinfachungen können wir auf elementare Weise sofort erzielen. Sind beide Grenzen des Bereichs Punkte, so bringen wir sie durch eine lineare Transformation nach Null und ∞. Ist nur eine Grenze ein Punkt, die andere jedoch nicht, so können wir den einfach zusammenhängenden Bereich, welcher entsteht, wenn man den isolierten Grenzpunkt zum Bereiche hinzunimmt, durch lineare Transformation, nötigenfalls unter Hinzunahme einer Quadratwurzeloperation, in einen Bereich verwandeln, der ganz in einem endlichen Bezirke, z. B. innerhalb des Einheitskreises enthalten ist. Dabei können wir es gleichzeitig so einrichten, daß der erwähnte isolierte Grenzpunkt der Nullpunkt wird. Liegt schließlich ein *gewöhnlicher Bereich* B vor (keine Begrenzungslinie reduziert sich auf einen Punkt), so können wir zunächst denjenigen, B enthaltenden einfach zusammenhängenden Bereich, welcher aus B entsteht durch Weglassung der einen Begrenzungslinie, in einen Bereich verwandeln, der ganz innerhalb des Einheitskreises liegt. Dabei geht B in einen Bereich B' über, der ebenfalls ganz innerhalb des Einheitskreises liegt, und nunmehr können wir die innere Begrenzungslinie von B' analog behandeln, indem wir den durch das Unendliche gehenden einfach zusammenhängenden Bereich, welcher aus B' durch Weglassung der äußeren Begrenzungslinie entsteht, mittelst einer linearen Transformation unter eventueller Hinzunahme einer Quadratwurzeloperation auf einen Bereich abbilden, der innerhalb des Einheitskreises liegt. Das Ergebnis ist, daß der Bereich jetzt in der Weise vereinfacht erscheint, daß der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt äußere Punkte (auch nicht Begrenzungspunkte) des Bereichs sind und durch den Bereich selbst voneinander getrennt werden.

Man kann in folgender Weise noch einen Schritt weitergehen, wenn man die konforme Abbildung des allgemeinsten einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises benutzt. Anstatt die angegebenen elementaren Operationen auszuführen, ersetzt man dieselben direkt durch Kreisabbildungen der betreffenden, oben in Betracht gezogenen, einfach zusammenhängenden Bereiche. Alsdann wird das Resultat ein Bereich sein, der im Falle des gewöhnlichen Bereichs von einem Kreise und einer geschlossenen, regulären, analytischen Linie begrenzt wird. Im Falle des einfach ausgearteten Bereichs gelangen wir in der angegebenen Weise direkt zum einfach ausgearteten Kreisring.

Im Falle des gewöhnlichen Bereichs gelangen wir unter Berufung auf das Hauptresultat des ersten Abschnittes folgendermaßen zum gewünschten Ziele der Abbildung des Bereichs auf einen gewöhnlichen Kreisring.

Wir wählen irgend zwei Punkte a und b auf den Begrenzungslinien, a auf der einen, b auf der anderen, und bilden den Bereich mittelst der Funktion $\log \frac{z-a}{z-b}$ ab. Diese Abbildung wird, da die Funktion $\log \frac{z-a}{z-b}$ unendlich-vieldeutig ist, zweckmäßig aufgefaßt als eine eineindeutige konforme Abbildung des über B befindlichen Teiles Φ der einfach zusammenhängenden *Riemann*schen Fläche des Logarithmus auf ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet Φ'. In der Tat ist Φ ebenfalls ein einfach zusammenhängendes Flächenstück. Der sich ergebende Bereich Φ' wird nicht nur von einem Punkte begrenzt. Man kann daher Φ' eineindeutig konform auf das Innere des Einheitskreises und diese Fläche durch lineare Transformation auf die obere Halbebene abbilden. Die Abbildungsfunktion, welche den Bereich B auf die erwähnte Halbebene abbildet, heiße $t(z)$. Einem vollständigen Umlauf im Bereiche B entspricht eine Transformation der oberen t-Halbebene in sich, also eine reelle lineare Transformation, welche jedenfalls keinen Fixpunkt in der oberen Halbebene hat, daher durch reelle lineare Substitution der Abbildungsfunktion $t(z)$ entweder auf die Form $t' = ct$ mit c als einer reellen positiven, von 1 verschiedenen Konstanten, oder auf die Form $t' = t \pm 2\pi$ gebracht werden kann.

Im *ersten* Falle kann man von der t-Halbebene mit Hilfe der Funktion $\tau = \log t$ auf die Fläche eines Parallelstreifens parallel zur Achse des Reellen übergehen, und es entspricht dann dem Übergange von t zu t' der Übergang von τ zu $\tau' = \tau + \log c$, wobei $\log c$ reell zu wählen ist. Jetzt würde der gefundene Parallelstreifen mit Hilfe der Funktion $z' = e^{\frac{2\pi i}{\log c}\tau}$ abgebildet, welche Funktion gewissermaßen eine Aufwickelung des Parallelstreifens über der Fläche eines Kreisringes bewirkt, wobei zwei Punkte dann und nur dann zur Deckung kommen, wenn ihr Unterschied ein positives oder negatives Vielfaches von $\log c$ ist. Das bedeutet aber, daß die Funktion $z'(z)$, die jetzt gefunden ist, eine eineindeutige konforme Abbildung des Inneren von B auf das Innere eines gewöhnlichen Kreisringes bewirkt.

Im *zweiten* Falle bilden wir $z' = e^{iz}$ und erhalten eine eineindeutige Abbildung des Bereichs B auf die Fläche eines einfach ausgearteten Kreisrings. Dies ist aber, insofern als wir gegenwärtig einen nicht ausgearteten Bereich B voraussetzen, unmöglich, wie sich durch Hinweis auf den Satz ergibt, daß eine in der Umgebung einer Stelle reguläre und beschränkte analytische Funktion sich auch noch an dieser Stelle regulär verhält. Im Rahmen unserer Betrachtungsweise bietet sich indes folgende, von jenem Hilfssatze keinen Gebrauch machende Beweisführung als eine naturgemäße dar.

Den Bereich B transformieren wir nach der oben bezeichneten Methode so, daß seine äußere Begrenzungskurve der Einheitskreis ist und der Nullpunkt weder dem Innern noch der Grenze angehört. Sei z ein in B variabler Punkt. Bei der Abbildung auf den ausgearteten Kreisring $(0 < |z'| < 1)$ durch die Funktion $z'(z)$ möge der inneren Begrenzungslinie von B der isolierte Grenzpunkt, nämlich $z' = 0$, entsprechen. Dann ist $\frac{1}{n} \log |z'|$ in B regulär und eindeutig und wird bei Annäherung an die innere Begrenzungslinie von B bestimmt negativ unendlich. Nun ergibt sich, wie oben S. 198, daß

$$\frac{1}{n} \log |z'| < \log |z|$$

ist für jedes ganzzahlige positive n, daß daher $\log |z|$ überall im Bereich B den Wert Null haben müßte.

Wir haben somit jetzt das Resultat:

Satz I. Jeder gewöhnliche oder einfach ausgeartete oder zweifach ausgeartete, zweifach zusammenhängende Bereich B läßt sich eineindeutig und konform und, abgesehen von einer linearen Transformation, nur auf eine Weise auf die Fläche eines Kreisringes abbilden, welcher bzw. ein gewöhnlicher, einfach ausgearteter oder zweifach ausgearteter Kreisring ist.

Satz II. In jedem zweifach zusammenhängenden schlichten Bereich B läßt sich eine im Inneren desselben reguläre von der einen Begrenzung zur anderen führende analytische Linie (Querschnitt) auf unendlichviele Weisen so bestimmen, daß der dadurch entstehende, einfach zusammenhängende Bereich B' auf die Fläche eines Halbkreisringes oder eines Halbparallelstreifens, oder schließlich eines Parallelstreifens (d. i. ganzen Parallelstreifens) abgebildet werden kann, dessen, dem Querschnitte entsprechende Randstücke im ersten Falle zwei durch eine homothetische

Transformation mit dem Mittelpunkt des Kreisringes als Zentrum aufeinander bezogene Halbkreise sind, im zweiten und dritten Falle zwei durch Parallelverschiebungen vertikal zur Längsachse des Parallelstreifens aufeinander bezogene Halbgeraden bzw. Geraden. Die betreffenden Abbildungsfunktionen sind bis auf eine Ähnlichkeitstransformation bestimmt, wenn im ersten Falle noch festgesetzt wird, welchem Durchlaufungssinne des Bereichs B der Übergang vom inneren zum äußeren Begrenzungshalbkreise entsprechen soll. Siehe die Figuren.

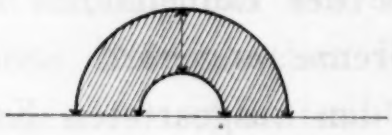


Fig. 1.

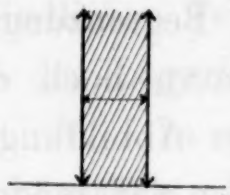


Fig. 2.

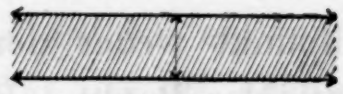


Fig. 3.

Wir vermerken noch den folgenden, durch die vorstehenden Überlegungen ohne Zuhilfenahme der *Laurent*schen Reihe oder des *Cauchy*schen Integrals erwiesenen Satz:

Satz III: Wird eine schlichte Umgebung U eines Punktes z_0 (exkl. z_0 selbst) eineindeutig konform auf ein Gebiet U' abgebildet, so verhält sich die Abbildung auch noch im Punkte z_0 selbst regulär, oder es besitzt die Abbildungsfunktion im Punkte z_0 eine Unendlichkeitsstelle erster Ordnung.

Unser Beweis würde sich so gestalten. Sei $f(z)$ die Abbildungsfunktion. Dann können wir durch Beschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung der Stelle z_0 bzw. ev. durch eine lineare Transformation von $f(z)$ erreichen, daß die Funktion $z' = f(z)$ beschränkt ist, mithin das Gebiet U' in einem endlichen Bezirke enthalten ist. Ferner können wir annehmen, daß die innere Begrenzung des zweifach zusammenhängenden Bereichs U, d. i. der Punkt z_0, der inneren Begrenzung von U' entspricht. Sei nun K ein in U verlaufender Kreis mit z_0 als Mittelpunkt, K' die Bildkurve von K in U'. Wir bilden den von K' umschlossenen, einfach zusammenhängenden Bereich auf die Fläche des Einheitskreises ab vermittelst einer Funktion $Z'(z')$, wobei der nach außen durch K' begrenzte Teil von U' in einen zweifach zusammenhängenden, nach außen vom Einheitskreise begrenzten Bereich U'' übergeht, von dem angenommen werden

kann, daß er den Nullpunkt weder in seinem Innern noch auf seiner Begrenzung enthält. Die Funktion $z(Z')$ bildet U'' auf einen ausgearteten Kreisring ab, was nach den Betrachtungen S. 202 nur möglich ist, wenn die innere Begrenzungslinie von U'' sich auf einen Punkt reduziert, so daß nun $z(Z')$ die Abbildung zweier ausgearteten Kreisringe aufeinander vermittelt, folglich eine lineare Funktion ist.

D. Dritter Teil.

Die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung.

§ 8.

Verhalten der Abbildungsfunktion längs geschlossener regulärer, analytischer Begrenzungslinien.

Es seien C und C' zwei geschlossene reguläre, ganz im Endlichen verlaufende analytische Linien, die eine in der z-Ebene, die andere in der z'-Ebene. Es sei ferner bekannt, daß ein an C anschließender, zweifach zusammenhängender Flächenstreifen eineindeutig konform auf einen an C' anschließenden Flächenstreifen abgebildet sei mittelst einer Funktion $z' = f(z)$, von welcher jedoch nicht als bekannt vorausgesetzt wird, daß sie sich auf der Linie C selbst noch regulär oder auch nur stetig verhält. Wir wollen beweisen, daß die Funktion $f(z)$ tatsächlich auf der Linie C regulär ist, und daß folglich die analytische Fortsetzung der Funktion $f(z)$ über C hinaus derart stattfindet, daß je zwei in bezug auf C im *Schwarz*schen Sinne spiegelbildlich symmetrischen Punkten der z-Ebene zwei in bezug auf C' spiegelbildlich symmetrische Punkte entsprechen.

Zum Beweise möge angenommen werden, daß die betrachteten Flächenstreifen im Inneren der Kurven C bzw. C' liegen. Wir beschränken uns jetzt in unserer Betrachtung auf so schmale Flächenstreifen S und S', daß es möglich ist, dieselben als solche an C bzw. an C' zu spiegeln, so daß sich wieder zwei schlichte Flächenstreifen ergeben. Die beiden zueinander spiegelbildlichen Flächenstreifen der z-Ebene bilden zusammen, unter Hinzunahme der Linie C zum Inneren, einen zweifach zusammenhängenden Bereich B. In derselben Weise erhalten wir in der z'-Ebene einen zweifach zusammenhängenden Bereich B'. Wir machen nun eine konforme Abbildung des Bereichs B auf einen Kreisring K mittelst einer

Funktion $\zeta(z)$. Analog wird durch eine Funktion $\zeta'(z')$ der Bereich B' auf einen Kreisring K' abgebildet. Es ist nun hervorzuheben, daß bei den erwähnten Abbildungen den Linien C und C' jedesmal ein mit dem betreffenden Kreisring konzentrischer Kreis (der Symmetralkreis des Ringes) entspricht, dessen Radius gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radien des betreffenden Kreisringes ist. Es überträgt sich nämlich die in B definierte Spiegeltransformation, welche C fest läßt, in eine gewisse Spiegeltransformation, welche das Innere des Kreisringes in sich überführt und eine gewisse Kurve $\varkappa$ fest läßt. Nach den Entwickelungen des § 6 ist es klar, daß es sich hier nur um eine Transformation durch reziproke Radien an dem Symmetralkreise handeln kann. Wir haben somit unsere ursprünglichen Flächenstreifen innerhalb C bzw. C' durch die Funktionen $\zeta(z)$ und $\zeta'(z')$ jede auf einen Kreisring, $\overline{K}$ und $\overline{K}'$, mit $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ (Symmetralkreis von K bzw. K') als umschließendem Begrenzungskreis abgebildet, und zwar in der Weise, daß dabei den Kurven C und C' in regulärer Weise die Kreise $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ entsprechen. Da nun die beiden Flächenstreifen S und S' durch eine Funktion $f(z)$ eineindeutig aufeinander bezogen waren, so ergibt sich eine entsprechende eineindeutige Beziehung der Kreisringe $\overline{K}$ und $\overline{K}'$, welche folglich linear ist (nach § 6), und welche somit auch auf den Kreislinien $\varkappa$ und $\varkappa'$ regulär erklärt ist. Dies überträgt sich aber nun rückwärts auf die Linien C und C', welche jetzt durch $f(z)$ in regulärer Weise aufeinander bezogen erscheinen.

Hiermit ist die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung eines einfach oder zweifach zusammenhängenden Bereichs im Sinne regulären analytischen Verhaltens der Abbildungsfunktion entschieden für alle einfach und mehrfach zusammenhängenden Bereiche, welche von geschlossenen analytischen Linien begrenzt sind, deren Inneres (exkl. der Begrenzungen) in eineindeutiger Weise konform wieder auf Bereiche derselben Begrenzungsform abgebildet vorausgesetzt wird.

§ 9.

Verhalten der Abbildungsfunktion längs regulärer analytischer Begrenzungsstücke.

Wir wollen die Frage der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche weiterverfolgen. Die Frage

wird damit übrigens von selbst auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche klargestellt, weil man jeden mehrfach zusammenhängenden Bereich mit $p+1$ Begrenzungslinien durch $p+1$ Operationen, deren jede einzelne eine konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Bereichs auf eine Kreisfläche darstellt, auf einen Bereich mit $p+1$ geschlossenen regulären Linien abbilden kann. Unser besonderes prinzipielles Interesse wird sich darauf zu richten haben, die Ränderzuordnungsfrage ohne Hinzuziehung des Integralbegriffs rein potenzreihentheoretisch zu erledigen.

Wir fassen zunächst den Fall eines schlichten Bereichs B ins Auge, welcher ein geradliniges Begrenzungsstück s hat von der Art, daß bei Spiegelung des ganzen Bereichs B an dem Begrenzungsstück s sich ein Bereich B' ergibt, der zusammen mit B einen neuen ebenfalls schlichten, einfach zusammenhängenden Bereich B'' bildet. Wir wollen zeigen, daß die Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$, welche die konforme Abbildung des Inneren des Bereichs B auf das Innere des Einheitskreises leistet, sich auf der ganzen Strecke s, exkl. deren hier nicht zu betrachtende Endpunkte, regulär verhält. Der Gedanke der Beweisführung besteht darin, die Abbildung des Bereichs B auf den ζ-Einheitskreis in neuer Weise herzustellen, und zwar in einer Form, bei welcher die Regularität der neuen Abbildung auf der Strecke s sofort evident wird*). Diese neue Abbildung kann sich ja von der eigentlich zu untersuchenden nur durch eine lineare Transformation unterscheiden wegen des für das Abbildungsproblem geltenden Unitätssatzes.

Wir bilden den Bereich B'' auf die Fläche des Einheitskreises ab. Bei dieser konformen Abbildung entspricht der Spiegelung des Bereichs B'' in bezug auf die Strecke s in der ζ-Ebene eine analytische Spiegelungstransformation, welche die Fläche des Einheitskreises eineindeutig in sich transformiert und eine gewisse Linie σ, nämlich das Bild von s, fest läßt. Nun ist klar, daß die erwähnte Transformation eine Transformation durch reziproke Radien ist, und daß daher σ ein den Einheitskreis in zwei Kreisbogenzweiecke zerlegender Orthogonalkreisbogen ist. Zur näheren Begründung kann man annehmen, daß σ die Achse des Reellen im Nullpunkte

*) Vgl. *C. Carathéodory*, Math. Ann. Bd. 73, S. 313 u. 314.

berührt. Setzt man nun die zu untersuchende Spiegelung an σ mit einer nachfolgenden Spiegelung an der Achse des Reellen zusammen, so ergibt sich eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst, welche den Nullpunkt und die Richtung der positiv-reellen Halbachse im Nullpunkt fest läßt, also mit der identischen Abbildung zusammenfällt. Dasjenige der genannten Kreisbogenzweiecke, welches dem Gebiet B entspricht, bilden wir elementar auf die Fläche des Einheitskreises ab, wobei σ in ein bestimmtes Stück der Peripherie regulär transformiert wird. Damit aber ist das Resultat gewonnen. Wir haben eine konforme Abbildung von B auf das Innere des Einheitskreises angegeben, bei welcher der Strecke s ein bestimmtes Stück der Peripherie in regulärer Weise entspricht.

Besitzt die Strecke s in bezug auf den Bereich B nicht die Eigenschaft, daß B'' wieder ein die Ebene schlicht bedeckender, einfach zusammenhängender Bereich ist, so können wir dies doch sofort durch eine Quadratwurzeloperation bewirken, indem wir die längs s aufgeschlitzt vorgestellte Vollebene auf eine Halbebene abbilden, wobei B in einen neuen Bereich B der gewünschten Art übergeht.

Besitzt der Bereich B einen Kreisbogen als Begrenzungsstück, so werden wir durch eine lineare Transformation, bei welcher der Kreisbogen in eine geradlinige Strecke übergeht, auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt.

Jetzt betrachten wir den Fall eines regulären analytischen Begrenzungsstücks s. Mit dem Begriffe des regulären analytischen Begrenzungsstücks ist unmittelbar die Möglichkeit der konformen Abbildung eines gewissen, das Stück s einbettenden Flächenstreifens S zu beiden Seiten von s auf einen Flächenstreifen $\bar{S}$ gesetzt, zu beiden Seiten eines Stücks $\bar{s}$ der Achse des Reellen. Den Flächenstreifen S denken wir uns als ein einfach zusammenhängendes Gebiet, in welchem s verläuft. Die Linie s fassen wir übrigens dabei nicht in der Vollständigkeit auf, in welcher sie als Begrenzung in Betracht kommt, vielmehr nehmen wir von dem betreffenden vollständigen Begrenzungsstück lediglich ein inneres Stück, eben unser s, irgendwo heraus.

Wir führen nun eine konforme Abbildung des Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises wieder schrittweise aus, und zwar so, daß wir bei jedem einzelnen Schritte sicher sind, bzw. uns überzeugen können,

daß die Abbildung auch noch auf s sich regulär verhält. Wir betrachten den einfach zusammenhängenden Bereich B^* der z-Ebene, welcher entsteht, wenn man sich diese Ebene lediglich längs s aufgeschlitzt denkt und die beiden Seiten von s als vollständige Begrenzung nimmt. Der Bereich B^* kann nun jedenfalls auf das Innere des Einheitskreises (ξ-Ebene) abgebildet werden. Dabei würde B in ein Teilgebiet desselben übergehen, welches nun einen Kreisbogen als Begrenzungsstück aufweist. Die ganze Frage wird dadurch auf die Frage reduziert, ob die erwähnte Abbildung des Bereichs B^* auf das Innere des ξ-Einheitskreises sich auf s noch regulär verhält, wobei die Endpunkte von s selbst von dieser näheren Bestimmung des Abbildungscharakters ausgeschlossen bleiben dürfen. Daß dies aber nun in der Tat der Fall ist, ergibt sich durch Betrachtung des Flächenstreifens S. Dieser Flächenstreifen konnte auf den Flächenstreifen $\bar{S}$ abgebildet werden durch eine Funktion, welche auch noch auf s regulär ist. Es fragt sich demnach, ob die hiermit gesetzte Abbildung des Flächenstreifens $\bar{S}$ auf einen nach außen von der Peripherie des ξ-Einheitskreises begrenzten Flächenstreifen den gewünschten Charakter der Regularität auf $\bar{s}$ besitzt.

Dies letztere ergibt sich aber als unmittelbare Folge des § 9 bewiesenen Satzes über den Charakter der Abbildung zweier durch geschlossene reguläre analytische Linien C und C' begrenzter Flächenstreifen aufeinander. Kann man doch den Flächenstreifen $\bar{S}$ sofort in einen solchen Streifen verwandeln, indem man elementar die längs $\bar{s}$ aufgeschlitzte Ebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet, wobei $\bar{S}$ in einen Flächenstreifen übergeht, der nach außen vom Einheitskreise begrenzt wird.

§ 10.

Verhalten der Abbildungsfunktion in Ecken und Spitzen, die von analytischen Kurvenbögen gebildet werden.

Wir fassen nun weiter den Fall eines Eckpunktes oder einer Spitze des Bereichs B ins Auge, welche von zwei in einem Punkte z_0 endigenden, regulären analytischen Begrenzungsstücken s_1 und s_2 gebildet werde. Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß die Linien s_1 und s_2 auch noch im Punkte z_0 regulär analytisch sind; sie brauchen sich vielmehr nur dem

Punkte z_0 asymptotisch zu nähern. Den Linien s_1 und s_2 entsprechen nach § 9 zwei Stücke σ_1 und σ_2 der Peripherie des Einheitskreises; die Funktion $\zeta = f(z)$, welche die konforme Abbildung des betrachteten schlichten Bereichs B auf die Fläche des Einheitskreises leistet, ist auf s_1 und s_2 regulär analytisch. Was jetzt bewiesen werden soll, ist, daß $f(z)$ im Punkte z_0, bei beliebig vorgestellter Annäherung an diesen Punkt innerhalb der betrachteten Ecke bzw. Spitze, stetig ist. Man bemerkt, daß es zum Zwecke dieses Nachweises wesentlich genügt, darzutun, daß die beiden Kreisbögen σ_1 und σ_2, die sich selbstverständlich nicht teilweise überdecken können, in einem und demselben Punkte ζ_0 der Peripherie des Einheitskreises zusammenstoßen, welcher Punkt dann eben dem Punkte z_0 entsprechen würde. Dies ergibt sich nach einer von *Picard* herrührenden äußerst einfachen und anschauungsmäßig gehaltenen Methode*). Wir nehmen an, daß σ_1 und σ_2 nicht zusammenstoßen, sondern in getrennten Punkten ζ_1 und ζ_2, beide entsprechend dem Punkte z_0, endigen. Alsdann können wir um z_0 einen Kreis von beliebig kleinem Radius beschreiben und auf diesem Kreise einen s_1 mit s_2 verbindenden Kreisbogen auswählen, welcher nun ein Stück der Ecke bzw. Spitze von beliebig kleinem Maximaldurchmesser abgrenzt. Übertragen wir diese Vorstellung in die ζ-Ebene, so erkennen wir, daß die Funktion $z(\zeta)$ sich längs des ganzen Peripheriestückes von ζ_1 bis ζ_2 stetig dem konstanten Werte z_0 nähert und sich folglich überhaupt auf eine Konstante reduziert, gemäß dem folgenden Hilfssatze. (Hilfssatz I).

Satz von *Schwarz*: Ist $F(z)$ eine oberhalb eines Stückes $a \ldots b$ der Achse des Reellen in einem gewissen anschließenden Flächenstreifen regulär erklärte analytische Funktion von der Eigenschaft, bei der Annäherung an die Achse des Reellen gleichmäßig einem konstanten Werte zuzustreben, so reduziert sich diese Funktion überhaupt auf eine Konstante**). —

---

*) *E. Picard:* „Traité d'analyse" t. II pag. 277 (I. édition).

Eine früher (1870) von *Schwarz* gefundene, nicht näher veröffentlichte Methode, die mir auf dem Wege mündlicher Mitteilung bekannt geworden ist, erstreckt sich nur auf den Fall, daß s_1 und s_2 in z_0 selbst noch den Charakter algebraischer Kurven besitzen.

**) *H. A. Schwarz:* „Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

Dieser Satz läßt sich ohne Integralbegriff folgendermaßen beweisen. Wir nehmen an, daß der erwähnte konstante Wert gleich Null sei, was durch Subtraktion derselbigen Konstanten von der Funktion erreicht werden kann. Wir denken uns jetzt über einem in $a \dots b$ enthaltenen Intervall der Achse des Reellen als Basis die Fläche H eines Halbkreises konstruiert. Das Intervall wird dabei so klein angenommen, daß der Halbkreis H ganz in dem Flächenstreifen liegt, in welchem wir die Funktion $F(z)$ als erklärt betrachten. Nunmehr wird die Fläche des Halbkreises elementar in der Weise auf die Fläche des Einheitskreises einer z'-Ebene abgebildet, daß die Endpunkte der Basis des Halbkreises den Punkten -1 und $+1$ entsprechen. Die in die z'-Ebene überpflanzte Funktion $F(z)$ möge mit $\Phi(z')$ bezeichnet werden. Diese Funktion wird nun längs der unteren Hälfte der Peripherie des Einheitskreises stetig in Null übergehen. Wird nunmehr mit $\Psi(z')$ die durch den Ausdruck $\Phi(\bar{z}')$ erklärte Funktion bezeichnet, wobei durch die Striche über den Buchstaben z', Φ der Übergang zum konjugiert imaginären Wert angedeutet sein soll, so ist die Funktion $\Phi(z') \cdot \Psi(z')$ eine längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises stetige in Null übergehende Funktion, welche daher nach dem Satze vom Maximum des absoluten Betrages einer regulären Funktion identisch verschwinden muß, womit dann $\Phi(z')$ und $F(z)$ identisch verschwinden müßten*).

Wird die Ecke oder Spitze speziell von Kreisbögen s_1 und s_2 gebildet, so ist es wünschenswert die analytische Natur der Abbildungsfunktion in dem Punkte z_0 noch genauer zu bestimmen. Wir erreichen dies, indem wir eine von der allgemeinen, soeben entwickelten Methode verschiedene und davon unabhängige Methode befolgen.

Ist zunächst der Winkel, unter welchem s_1 und s_2 zusammenstoßen, von 0, π und 2π verschieden, so gelangen wir durch lineare Transformation zu einer Ecke, gebildet von zwei im Punkte $z = 0$ zusammentreffenden

---

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen", Berliner Monatshefte 1870, Ges. Abh. Bd. II. In dieser Abhandlung hat *Schwarz* überhaupt seine auf dem Spiegelungsprinzip der Potentialfunktionen, d. i. auf dem *Poisson*schen Integral beruhenden Beweisgedanken betreffs der Ränderzuordnung bei analytischer Begrenzung mitgeteilt.

*) Vgl. eine analoge Betrachtungsweise in *E. Lindelöf*s S. 212 zitierter Note.

geradlinigen Strecken, die wir wieder mit s_1 und s_2 bezeichnen. Vermittels eines Kreises um den Punkt $z = 0$ als Mittelpunkt schneiden wir nun vom Bereiche B einen Sektor S ab und diesen bilden wir elementar auf die Fläche eines Halbkreises ab. Die Fläche H dieses Halbkreises erscheint nun, abgesehen vom Basismittelpunkte des Halbkreises, regulär analytisch auf ein Stück Σ des ζ-Einheitskreises bezogen, wobei insbesondere die Basis selbst nach Ausschluß ihres Mittelpunktes auf zwei getrennte Stücke σ_1 und σ_2 der Peripherie abgebildet wird. Nun folgt aber, daß die Abbildung auch noch im Mittelpunkte selbst regulär ist, weil man sowohl den Halbkreis H als auch das Stück Σ auf die Fläche des Einheitskreises abbilden kann, so, daß für die in Untersuchung stehenden Stellen die Abbildung durchaus regulär ist, und weil die nun zu betrachtende Beziehung des Einheitskreises auf sich selbst notwendig eine ganze oder gebrochene lineare Funktion ist.

Liegt einer der oben besonders genannten Fälle vor, in welchen nämlich der Winkel 0, π oder 2π ist, so verlege man durch lineare Transformation den Eckpunkt in den unendlich fernen Punkt so, daß s_1 und s_2 Halbgeraden parallel der Achse des Reellen werden. Nunmehr leistet die Exponentialfunktion im Falle des Winkels 0, die Umkehrungsfunktion von $z + \log z$ im Falle des Winkels π oder 2π denselben Dienst, welchen vorher die Potenzfunktion leistete. An Stelle des den Kreissektor von vorhin begrenzenden Kreisbogens tritt jetzt beim Winkel 0 eine geradlinige Strecke, in den anderen Fällen ein Zykloidenbogen.

§ 11.

*Behandlung der Frage der Ränderzuordnung im allgemeinsten Falle**).

Um das Verhalten der Funktion $\zeta = f(z)$ am Rande des Bereichs B im allgemeinsten Falle zu bestimmen und damit zu den allgemeinen Re-

*) Vgl. meine Note „Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ in Gött. Nachr. 1913, S. 286, in welcher insbesondere der Hilfssatz II (vorliegende Abh. S. 212) mitgeteilt und potentialtheoretisch bewiesen ist. Eine auf diese Beweisführung sich beziehende Bemerkung, welche Herr *Carathéodory* in einer anschließenden Note „Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung“ (Gött. Nachr. 1913, S. 509, Zeile 6—8) macht, ist m. E. unbegründet. Im übrigen sei auf die neueren, den Gegenstand betreffenden Arbeiten von *Osgood* („On the Transformation of the Boundary in the Case of Conformal

sultaten von *Osgood, Fatou-Carathéodory, Study* zu gelangen, benötigen wir einen über den vorhin aufgestellten hinausgehenden Hilfssatz. Dieser neue Hilfssatz lautet folgendermaßen:

Hilfssatz II. Es sei $F(z)$ eine oberhalb der Achse des Reellen längs eines Stücks $a \ldots b$ derselben regulär erklärte analytische Funktion, deren Werte dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke M bleiben mögen, und welche außerdem folgende Eigenschaft besitzt: Es soll möglich sein, in beliebiger Nähe der Achse des Reellen längs des ganzen Stücks $a \ldots b$ immer noch eine Linie λ anzugeben, auf welcher sich die Funktionswerte von einem konstanten, von λ unabhängigen Werte gleichmäßig um eine beliebig kleine Größe unterscheiden. Alsdann ist die Funktion eine Konstante*). —

Der Beweis dieses neuen Hilfssatzes läßt sich ebenso führen, wie der Beweis des ersteren. Der konstante Wert kann zunächst auf Null gebracht werden. In dem Halbkreis H verlaufen die Linien λ von Randpunkt zu Randpunkt. In der z'-Ebene bekommen wir eine Funktion $\Phi(z') \cdot \overline{\Phi}(\overline{z'})$, welche nun auf geschlossenen, längs der ganzen Peripherie des Einheitskreises entlang laufenden, den Nullpunkt umschließenden Linien Λ dem absoluten Betrage nach einen beliebigen Kleinheitsgrad besitzt und sich folglich auf eine Konstante reduzieren muß.

Fassen wir nun sogleich den Fall des allgemeinsten Bereichs B ins Auge, wobei wir diesen Bereich ganz im Endlichen liegend und den Nullpunkt im Inneren enthaltend uns vorstellen wollen, was immer durch eine lineare Transformation eventuell in Verbindung mit einer Quadratwurzeloperation erreichbar ist.

Mapping", Bull. of the Am. Math. Soc., II. Series 9, 1902/3, S. 233—235), *Osgood-Taylor* (Am. Trans. 1913), *Carathéodory, Study, Lindelöf, Courant* verwiesen, bei welch letzterem man wegen der ausführlichen Zitate nachsehen wolle (Dieses Journal Bd. 144). Die Arbeiten von *Lindelöf* (Compt. Rend. 1914) und *Courant* erschienen während der Niederschrift bzw. nach Einsendung der vorliegenden Abhandlung.

*) Ist der konstante Wert von λ abhängig, d. h., wird von der Funktion $F(z)$ außer ihrer Beschränktheit nur vorausgesetzt, daß die Schwankung auf Linien λ, die sich mehr und mehr der Strecke $a \ldots b$ anschmiegen, unendlich klein wird, so muß sich $F(z)$ ebenfalls auf eine Konstante reduzieren, weil man nun jedenfalls auch in der Lage ist, eine solche Folge von Linien λ auszuwählen, auf welchen die Konvergenz der Funktionswerte gegen einen konstanten Wert im Sinne der Voraussetzungen des Hilfssatzes II stattfindet.

Wir unterscheiden zwischen erreichbaren und nichterreichbaren Grenzpunkten des Bereichs B. Ein Grenzpunkt P heißt erreichbar, wenn es eine Linie L gibt, welche von dem Inneren des Bereichs aus sich dem Punkte P unbegrenzt nähert, so daß ein die Linie L durchlaufender Punkt gegen den Punkt P konvergiert.

Daß ein Grenzpunkt P durchaus nicht immer ein erreichbarer Punkt zu sein braucht, lehrt das Beispiel des folgenden Bereichs: In dem Quadrat mit den Ecken $0, 1, 1+i, i$ mögen in den Punkten der Form $\frac{1}{n}$ $[n=2, 3, 4, \ldots]$ senkrecht zur Achse des Reellen Strecken von der Länge $\frac{1}{2}$ errichtet werden, welche sich gegen eine Strecke a, von 0 bis $\frac{i}{2}$, häufen. Die erwähnten Strecken zusammen mit den Seiten des Quadrates bilden die vollständige Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Bereichs B, für welchen die Punkte der Strecke a auf der Achse des Imaginären (exkl. $\frac{i}{2}$ selbst) nichterreichbare Grenzpunkte sind.

Um einen bestimmten erreichbaren Grenzpunkt des allgemeinen Bereichs B präzise zu definieren, genügt es im allgemeinen nicht, nur diesen Punkt selbst anzugeben, sondern es ist außerdem eine Linie L anzugeben, auf welcher die Erreichung stattfinden kann. Die Linie L können wir uns dabei zweckmäßig immer vom Nullpunkt ausgehend vorstellen. Ein und derselbe Grenzpunkt kann nämlich möglicherweise von ganz verschiedenen Seiten her erreichbar sein und in diesem Sinne sogar ein unendlichvielfach zu zählender Punkt sein. Wir werden naturgemäß zwei erreichbare Grenzpunkte P_1 und P_2 von B mit den zugehörenden definierenden Linien L_1 und L_2 dann und nur dann als einen und denselben erreichbaren Grenzpunkt ansprechen, wenn erstens P_1 und P_2 mit einem und demselben Punkte P koinzidieren, und wenn außerdem die Linien L_1 und L_2, die wir uns, wie gesagt, beide vom Nullpunkte ausgehend vorstellen, nur solche Gebiete umschließen die ganz in B enthalten sind, also keinen Grenzpunkt von B enthalten, außer P selbst. Die so definierte Gesamtheit der verschiedenen erreichbaren Grenzpunkte des Bereichs B befindet sich offenbar in zyklischer Anordnung.

Wir beweisen nun eine Reihe von Sätzen, welche die Hauptergebnisse der *Osgood-Fatou-Study-Carathéodory*schen Untersuchungen bilden*).

*) Das im *Fatou*schen Satze (s. *Carathéodory* und *Study* a. a. O.) enthaltene

Satz I: Es sei P ein erreichbarer Grenzpunkt von B, L eine ihn definierende Linie. Alsdann entspricht der Linie L im ζ-Einheitskreise eine Linie Λ, die in einem Punkte der Peripherie endigt.

Nehmen wir in der Tat das Gegenteil an, so würde die Linie Λ einen Verlauf zeigen, bei welchem sie an einem gewissen Stück der Peripherie des Einheitskreises sicher unendlich oft entlangstreicht, dabei in immer größere Nähe des Einheitskreises kommend, so daß $z(\zeta)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes II erfüllen, also konstant sein würde.

Satz II: Sind L_1 und L_2 zwei verschiedene, einen und denselben erreichbaren Grenzpunkt P $(z = z_0)$ definierende Linien, so endigen die entsprechenden Linien Λ_1 und Λ_2 der ζ-Ebene in demselben Punkte der Peripherie des Einheitskreises.

Wir nehmen an, es würden sich zwei verschiedene Grenzpunkte ζ_1 und ζ_2 ergeben. Alsdann werden sich Λ_1 und Λ_2 von einer gewissen Stelle an nicht mehr schneiden, was dann auch von L_1 und L_2 von der korrespondierenden Stelle ab gilt. Sind ζ^* und z^* die letzten Treffpunkte, so begrenzen die erst von ζ^* bzw. z^* ab in Betracht gezogenen Linien Λ_1 und Λ_2 bzw. L_1 und L_2 zwei Gebiete I' und G, deren eines an den Kreisbogen $\zeta_1 \ldots \zeta_2$ anstößt, während das andere entsprechend an P anstößt. Man erkennt sofort, daß nun die Funktion $z(\zeta)$ längs des Kreisbogens $\zeta_1 \ldots \zeta_2$ gleichmäßig dem konstanten Werte z_0 zustreben und sich folglich auf eine Konstante reduzieren muß nach Hilfssatz I.

Satz III: Zwei verschiedenen erreichbaren Grenzpunkten z_1 und z_2 mit den definierenden Linien L_1 und L_2 entsprechen stets auch verschiedene Punkte ζ_1 und ζ_2 der Peripherie des ζ-Einheitskreises.

Beweis: Die Linien L_1 und L_2 werden sich von einer gewissen Stelle ab nicht mehr schneiden. Die von da genommenen Endstücke dieser Linien bilden zusammen einen Querschnitt Q von z_1 nach z_2, welcher den Bereich B in zwei Gebiete B_1 und B_2 zerlegt. Wird angenommen, daß die Linien Λ_1 und Λ_2 in einem und demselben Punkte ζ_0 endigen, so ergibt sich als Bild von B_1 oder andernfalls von B_2 ein Teilgebiet I'_1 innerhalb des Einheitskreises, welches nur in dem einen Punkt ζ_0 die

---

Resultat bleibt hier außer Betracht, soweit es auf den *Lebesgue*schen Maßbegriff Bezug nimmt, desgleichen, insoweit es auf allgemeine beschränkte analytische Funktionen, die nicht Abbildungsfunktionen sind, Bezug hat.

Peripherie des Einheitskreises erreicht. Sei B_1 das Γ_1 entsprechende Gebiet. Wir konstruieren jetzt in B_1 einen Querschnitt des Bereichs B in Gestalt eines einfachen Kreisbogens. Um einen solchen Querschnitt zu finden, wählen wir in unmittelbarer Nähe irgend eines von z_1 und z_2 verschiedenen Grenzpunktes des Bereichs B_1, der zugleich Grenzpunkt von B ist, einen inneren Punkt A des Bereichs B_1 und ziehen von A aus den kürzesten Radiusvektor nach der Grenze des Bereichs B_1, der in A' endigen möge. Um A' als Mittelpunkt konstruieren wir sodann den Kreis mit dem Radius $A'A$, welcher, von A aus nach beiden Seiten bis zur Grenze des Bereichs B_1 verfolgt, uns den gewünschten kreisförmigen Querschnitt q liefert, der nun B_1 in zwei Stücke zerlegt, von denen das dem Querschnitt Q abgewandte Stück, B', uns weiter interessiert. Wir machen jetzt eine konforme Abbildung von B' auf die Fläche des Einheitskreises einer z'-Ebene, wobei wir nach § 9 dem Kreisbogen q etwa den unteren Halbkreis entsprechen lassen können. Die Funktion $\zeta(z')$ ist nunmehr innerhalb des ganzen Einheitskreises der z'-Ebene erklärt und geht längs des ganzen oberen Halbkreises gleichmäßig in den konstanten Wert ζ_0 über, wäre somit nach Hilfssatz I überhaupt konstant.

Satz IV: Die Gesamtheit M' aller Punkte Π der Peripherie des ζ-Einheitskreises, welche den verschiedenen erreichbaren Grenzpunkten des Bereichs B im Sinne der Sätze I, II, III entsprechen, bilden eine Punktmenge, welche auf der Peripherie des Einheitskreises überall verstreut ist, so daß in jedem noch so kleinen Intervall der Peripherie des Einheitskreises Punkte der Menge M' liegen.

Beweis: Es wird angenommen, daß ein Bogen von ζ_1 bis ζ_2 auf der Peripherie des Einheitskreises von Punkten der Menge M' frei sei. Alsdann konstruieren wir den Radius V vom Nullpunkte nach einem Punkte ζ_3 innerhalb des erwähnten Kreisbogens $\zeta_1 \ldots \zeta_2$. Diesem Radius entspricht in B eine Linie L, welche sich der Begrenzung von B asymptotisch nähert. Nunmehr wählen wir auf L eine gegen einen Grenzpunkt z_* konvergierende Punktfolge $z_1, z_2, z_3, \ldots$ und konstruieren in B die von diesen Punkten nach der Begrenzung von B führenden kürzesten geradlinigen Strecken $s_1, s_2, s_3, \ldots$, deren Länge mit unbegrenzt wachsendem Index offenbar unendlich klein wird. Diesen Strecken entsprechen im Einheitskreise Linien $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, welche von Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ des

Radiusvektors V ausgehen und in Punkten der Peripherie des Einheitskreises, jedoch außerhalb des Bogens $\zeta_1 \dots \zeta_2$ endigen. Beachten wir, daß die Punkte z_n gegen z_* konvergieren, und daß von den Linien σ_n notwendig unendlichviele entweder längs des Peripheriestücks $\zeta_3 \dots \zeta_1$ oder $\zeta_3 \dots \zeta_2$ entlang laufen müssen, so erkennen wir, daß auf die Funktion $z(\zeta)$ mit Bezug auf einen der beiden genannten Kreisbögen die Voraussetzungen des Hilfssatzes II Anwendung finden, daß sich mithin die Funktion $z(\zeta)$ auf eine Konstante reduzieren müßte.

Satz V: Die Funktion $\zeta = f(z)$ vermittelt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Peripherie des Einheitskreises und den Randelementen des Bereichs B.

Die vollständige Begrenzung des Bereichs B kann nach folgendem Prinzipe in *Randelemente**) aufgelöst werden. Die Menge M aller erreichbaren Punkte der Begrenzung von B bildet, wie erwähnt, ein in zyklischer Anordnung befindliches Punktsystem. Demgemäß können wir in dieser Punktmenge, ähnlich wie im Gebiete der rationalen Zahlen, „Schnitte" definieren. Diese Schnitte wollen wir jedoch stets so nehmen, daß wir den eventuell vorhandenen innersten Punkt bei der Schnittbildung unbeteiligt bleiben lassen. Nunmehr können wir die einzelnen Schnitte durch Folgen von Punktepaaren $P_n P_n'$ aus der Menge M ersetzen, welche den Schnitt in derselben Weise definieren, wie man einen Schnitt im Gebiete der rationalen Zahlen durch unendlich klein werdende ineinandergeschachtelte Intervalle mit rationalen Endpunkten definiert. Jetzt wird die Folge der Punktepaare $P_n P_n'$ zur Definition einer Folge ineinandergeschachtelter Querschnitte Q_n verwandt, von welchen der einzelne Querschnitt Q_n die erreichbaren Randpunkte P_n und P_n' miteinander verbindet. Dabei ist noch die Bedingung zu erfüllen, daß mit unbegrenzt wachsendem Index n die Linien Q_n gleichmäßig der Grenze des Bereichs B zustreben, d. h. von einem gewissen n ab außerhalb eines jeden ganz inneren Teilbereichs β von B zu liegen kommen. Wird der durch Q_n abgeschnittene Teilbereich von B mit b_n bezeichnet, so definieren wir nun als das Randelement $[Q_n]$ die Gesamtheit der Grenzpunkte von B, welche allen Bereichen b_n als Grenzpunkte angehören. So bildet in unserem Beispiel S. 213 die Strecke a

*) *Carathéodory* spricht von „*Primenden*". Ich bringe statt dessen die einfachere Bezeichnung „*Randelemente*" in Vorschlag.

von 0 bis $\frac{i}{2}$ auf der Achse des Imaginären ein Randelement. Wir werden zwei Randelemente $[Q]$ und $[Q']$ dann und nur dann als verschieden bezeichnen, wenn die zur Definition benutzten Bereiche b_n und b_n' von einem gewissen n ab keinen inneren Punkt gemeinschaftlich haben. Es ist klar, daß ein und derselbe Grenzpunkt nunmehr als unendlichvielfacher Punkt erscheinen kann, insofern als er nämlich unendlichvielen Randelementen angehören kann. Es ist ferner klar, daß ein Randelement höchstens einen erreichbaren Grenzpunkt enthalten kann. In unserem Beispiel ist dies der Punkt $\frac{i}{2}$.

Der Inhalt unseres Satzes V soll nun der sein, daß der Querschnittfolge Q_n eine Querschnittfolge im ζ-Einheitskreise entspricht, die sich schließlich auf einen Punkt der Peripherie zusammenzieht, und daß umgekehrt einer Folge von Querschnitten im ζ-Einheitskreise, die sich auf einen Punkt der Peripherie zusammenziehen und dabei sämtlich als Verbindungslinien zwischen Punkten der Menge M' gewählt gedacht werden dürfen, eine Querschnittfolge Q_n entspricht, die ein Randelement $[Q]$ definiert. Daß die so gemeinte Korrespondenz zwischen den Randelementen von B und den Punkten der Peripherie des ζ-Einheitskreises eine eineindeutige ist, ist, wie überhaupt der ganze Inhalt des Satzes V, auf Grund der Sätze I—IV unmittelbar einleuchtend. Der Satz V erscheint gewissermaßen als eine bequeme Art, den Inhalt der vorstehenden Sätze konzentriert wiederzugeben.

Das allgemeine Resultat dieses Paragraphen liefert, angewandt auf den Fall eines von einer *Jordan*-Kurve begrenzten Bereichs B oder noch spezieller eines konvexen Bereichs B, in welchem Falle die Begrenzungslinie ja immer eine *Jordan*-Kurve ist, den von *Osgood* aufgestellten Satz, daß in diesen Fällen die Abbildungsbeziehung bis in den Rand hinein stetig und eineindeutig erklärt werden kann*). In diesen Fällen sind nämlich alle Punkte der Begrenzung erreichbare und einfache Punkte; es reduzieren sich die Randelemente sämtlich auf Punkte.

Man kann fragen nach der charakteristischen Eigentümlichkeit derjenigen Bereiche B, für welche die Funktion $z(\zeta)$ bis in die Peripherie des Einheitskreises hinein als stetige Funktion erklärt werden kann, ohne

*) S. auch die Beweise bei *Osgood* und *Carathéodory* a. a. O.

daß dabei ausgeschlossen wird, daß diese Funktion an mehreren Stellen der Peripherie denselben Wert annimmt. Die Frage beantwortet sich sofort dahin: Es müssen sich alle Randelemente auf Punkte reduzieren. Diese Eigenschaft läßt sich auch durch folgende damit äquivalente Eigenschaft ersetzen: Ist P ein Grenzpunkt des Bereichs, L eine ihn approximierende Linie in B, so ist es stets möglich, auf L eine gegen P konvergierende Punktfolge zu bestimmen und durch dieselbe eine Linie L' in B zu ziehen, welche in P endigt; hierfür können wir abgekürzt sagen: Jeder Grenzpunkt P ist erreichbar, und zwar *entlang* jeder ihn approximierenden Linie L.

§ 12.

Analytische Spiegelung an einer Jordan-Kurve.

Der in § 11 gegebene Nachweis der am Rande noch bestehenden Stetigkeit der konformen Abbildung eines von einer *Jordan*-Kurve begrenzten einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche des Einheitskreises kann als Grundlage dienen, um den Begriff der geschlossenen regulären analytischen Linie und im speziellen des Kreises durch eine bestimmte analytische Spiegelungseigenschaft aus dem allgemeinen Begriffe der *Jordan*-Kurve herauszuheben. Wir behaupten folgenden Satz:

Satz I: Wird von einer in der z-Ebene gegebenen *Jordan*-Kurve angenommen, daß es möglich sei, eine eineindeutige konforme Abbildung mit Umlegung der Winkel zu definieren, welche dem vollständigen Inneren der *Jordan*-Kurve das vollständige Äußere derselben einschließlich des unendlichfernen Punktes entsprechen läßt, und welche auf der *Jordan*-Kurve selbst noch stetig ist, d. h. jeder von innen her in einem Punkte der *Jordan*-Kurve endigenden Linie eine von außen her in demselben Punkte endigende Linie entsprechen läßt, so ist die *Jordan*-Kurve ein Kreis und die Spiegelung nichts anderes als die bekannte Transformation durch reziproke Radien. —

Satz II: Existiert die erwähnte Abbildung nicht für das ganze Innere, jedoch für eine gewisse Nachbarschaft der *Jordan*-Kurve, so ist die *Jordan*-Kurve eine geschlossene reguläre analytische Linie, und die betrachtete Abbildung ist identisch mit der bekannten *Schwarz*schen analytischen Spiegelung an dieser Linie. —

Zum Beweise des Satzes I bilden wir das Innere der *Jordan*-

Kurve C durch eine Funktion $\zeta(z)$ auf das Innere des Einheitskreises ab. Gleichzeitig definieren wir eine konforme Abbildung des Äußeren der Kurve C auf das Äußere des Einheitskreises durch die Bestimmung, es solle einem Punkte z' außerhalb C, welchem, vermöge der vorausgesetzten „Spiegelung" an C, innerhalb C der Punkt z entspreche, in der ζ-Ebene der Punkt ζ' entsprechen, welcher aus ζ durch Spiegelung am Einheitskreise (Transformation durch reziproke Radien) hervorgeht. Auf diese Weise ist für die ganze ζ-Ebene eine eindeutige analytische Funktion erklärt, die nur an einer Stelle außerhalb des Einheitskreises unendlich von erster Ordnung wird, und die auf dem Einheitskreise selbst allerdings zunächst nur als stetig bezeichnet werden kann. Diese Stetigkeit ist eben eine Folge der Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ auf der Begrenzung C des abgebildeten Bereichs. Nun besteht aber der Satz, daß eine zu beiden Seiten eines Stückes der Achse des Reellen eindeutig und regulär erklärte analytische Funktion, von welcher auf der Achse des Reellen jedoch nur die Stetigkeit bekannt ist, auch auf der Achse des Reellen selbst regulär sein muß. Der Beweis dieses letzteren Satzes wird bekanntlich geführt mittelst der *Cauchy*schen Integralformel in analoger Weise, wie nach *Schwarz**) das Spiegelungsprinzip für analytische Funktionen bewiesen wird. Machen wir jetzt von dem Satze Gebrauch, indem wir an die Stelle der Achse des Reellen die Peripherie des Einheitskreises treten lassen, so erkennen wir, daß die Funktion $z(\zeta)$ sich auch auf dem Einheitskreise regulär verhält und folglich eine eindeutige, durchweg konforme Abbildung der ζ-Ebene auf die volle z-Ebene vermittelt, d. h. eine überall reguläre Funktion mit nur einer Unendlichkeitsstelle erster Ordnung ist, also eine lineare Funktion. Dieses aber hat zur Folge, daß die Kurve C eine Kreislinie ist, und daß die Spiegelung an C sich auf die Transformation durch reziproke Radien reduziert.

Unter den Voraussetzungen des Satzes II lehrt dieselbe Hilfsabbildung in Verbindung mit dem eben genannten Hilfssatze über analytische Funktionen, daß die nunmehrige Funktion $z(\zeta)$, wie sie zu beiden Seiten der Peripherie des Einheitskreises erklärt ist, sich auf diesem selbst noch regulär verhalten muß und daher diesem Kreise eine geschlossene, reguläre analytische Linie, d. i. C, entsprechen läßt.

*) *H. A. Schwarz*: „Über einige Abbildungsaufgaben" Ges. Abh. Bd. II.

Der Satz II läßt sich offenbar in der Weise erweitern, daß an Stelle einer geschlossenen *Jordan*-kurve ein *Jordan*-Kurvenstück mit zwei Endpunkten tritt, zu dessen beiden Seiten anschließende Flächenstreifen durch „Spiegelung" aufeinander bezogen werden. Auch ein solches Kurvenstück muß, abgesehen von den Endpunkten, den Charakter einer regulären analytischen Linie besitzen, und die „Spiegelung" der beiden Seiten aufeinander muß mit der *Schwarz*schen Spiegelung zusammenfallen.

§ 13.

Die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungsfunktion.

Die Funktion $\zeta(z)$ besitzt eine Eigenschaft, welche mit der Frage der Ränderzuordnung in engem Zusammenhang steht, ohne dieselbe zu erschöpfen, jedoch andererseits für sich Interesse beanspruchen kann. Es ist dies die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit dieser Funktion, gültig für das ganze, nicht abgeschlossene Innere von B. Diese Eigenschaft findet ihren präzisen Ausdruck in folgendem Satze.

Satz: Die Funktion $\zeta(z)$ ist in B (exkl. Grenze) unter allen Umständen, d. h. ohne Annahme irgendeiner spezielleren Voraussetzung über die Begrenzung des Bereichs B, der nur im Endlichen liegend, d. h. genauer innerhalb eines endlichen Kreises, vorgestellt wird, gleichmäßig stetig im Sinne einer sofort für den ganzen Bereich B gültigen Abschätzung. Der Entfernungsbegriff für irgend zwei Punkte z_1 und z_2 des Bereichs, die ja innerhalb B nicht immer geradlinig verbunden werden können, ist dabei zu erklären als die untere Grenze der Längen aller aus geradlinigen Strecken gebildeten von z_1 nach z_2 innerhalb B verlaufenden Polygonzüge. —

Wird die im Satz definierte Entfernung der beiden Punkte z_1 und z_2 mit $E_{1,2}$ bezeichnet, so besagt unser Satz folgendes: Nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven, von Null verschiedenen Größe ε läßt sich stets eine positive von Null verschiedene Größe δ_ε bestimmen, so daß $|\zeta_2 - \zeta_1| < \varepsilon$ wird, für alle Punktpaare z_1, z_2 des Bereichs B, für welche $E_{1,2} < \delta_\varepsilon$ ist.

Der Beweis ergibt sich sofort indirekt. Die Annahme des Gegenteils würde nämlich zur Folge haben, daß man eine unendliche Folge von Punktpaaren $z_1^{(\nu)}, z_2^{(\nu)} [\nu = 1, 2, \ldots]$ angeben könnte, für welche die Entfernung $E_{1,2}^{(\nu)}$ gegen Null konvergiert, während die Entfernungsgröße $|\zeta_2^{(\nu)} - \zeta_1^{(\nu)}|$ oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen Schranke bleibt. Es ist

klar, daß die Punktpaare $z_1^{(\nu)}$, $z_2^{(\nu)}$ in diesem Falle mit wachsendem Index ν sich der Grenze des Bereichs B unbegrenzt nähern und demgemäß die Punktpaare $\zeta_1^{(\nu)}$, $\zeta_2^{(\nu)}$ der Peripherie des Einheitskreises. Wir dürfen annehmen, was eventuell durch Betrachtung einer Teilfolge der ursprünglich gewählten Folge jederzeit erreicht wird, daß die Folge der Punktpaare $z_1^{(\nu)}$, $z_2^{(\nu)}$ gegen einen bestimmten Grenzpunkt z_* konvergiert. Wegen $\lim_{\nu=\infty} E_{1,2}^{(\nu)} = 0$ lassen sich die Punktpaare innerhalb B durch Linien $s^{(\nu)}$ von schließlich unendlich klein werdender Länge verbinden. Diesen Linien $s^{(\nu)}$ entsprechen im ζ-Einheitskreise Linien $\sigma^{(\nu)}$, die $\zeta_1^{(\nu)}$ mit $\zeta_2^{(\nu)}$ verbinden und sich mit wachsendem Index ν gleichmäßig der Peripherie des Einheitskreises anschmiegen und daher nun an einem gewissen Stück Σ der Peripherie jedenfalls unendlich oft entlanglaufen werden. Demgemäß treffen auf die Funktion $z(\zeta)$ mit Beziehung auf das Stück Σ und den konstanten Wert z_* die Voraussetzungen des Hilfssatzes II S. 212 zu, so daß die Funktion $z(\zeta)$ sich auf eine Konstante reduzieren müßte.

Wie tief wir mit dem soeben bewiesenen Satze bereits in das Wesen der Ränderzuordnungsfrage eingedrungen sind, erkennt man aus dem Umstande, daß auf Grund dieses Satzes zum Beispiel im Falle einer *Jordan*-Kurve als Begrenzung die Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ bis in die Grenze hinein bewiesen ist. Zur vollen Klärung der Ränderzuordnungsfrage in diesem Falle ist nur noch der Nachweis der Eineindeutigkeit der Beziehung zwischen den Punkten der *Jordan*-Kurve und den Punkten der Peripherie des ζ-Einheitskreises zu erbringen, was oben geschehen ist.

Unser Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion $\zeta(z)$ steht in enger, sofort ersichtlicher Beziehung zu einem von *Osgood* bereits 1903 l. c. ohne Beweis mitgeteilten, von ihm als „physical law" bezeichneten Satze: „*Physical law:* Let a fixed circle be drawn in B with O as centre. Let c be an open curve of length l drawn in B, but lying outside the fixed circle. Let the maximum numerical value of the flux across c (or the upper limit, in case no maximum exists), when c assumes all possible forms and positions, be denoted by $f(l)$, then $\lim_{l=0} f(l) = 0$."

Mit 0 ist hierbei die Unendlichkeitsstelle der *Green*schen Funktion des Bereichs B bezeichnet, mit $f(l)$ eine Größe, welche numerisch gleich ist dem Unterschied der Amplituden der den Endpunkten von l bei der Ab-

bildung entsprechenden Punkte innerhalb des Einheitskreises. Man bemerkt, daß unser obiger Satz und der *Osgood*sche leicht auseinander gefolgert werden können.

Inhaltsübersicht.

Seite

A. Einleitung 177

B. Erster Teil: Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, einfach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreises. Das Schmiegungsverfahren 180

§ 1. Vorbereitungen 180

§ 2. Das Schmiegungsverfahren und die Schmiegungswirkung desselben 183

§ 3. Die gleichmäßige Konvergenz der Größen $|z_n|$ bzw. $\log|z_n|$ 188

§ 4. Herleitung eines Hilfssatzes 190

§ 5. Zuendeführung des Konvergenzbeweises. Nähere Untersuchung der Grenzabbildung 192

C. Zweiter Teil: Konforme Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings 195

§ 6. Abbildung von Kreisringflächen aufeinander 195

§ 7. Abbildung des allgemeinsten schlichten, zweifach zusammenhängenden Bereichs auf die Fläche eines Kreisrings 200

D. Dritter Teil: Die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. 205

§ 8. Verhalten der Abbildungsfunktion längs geschlossener regulärer, analytischer Begrenzungslinien 205

§ 9. Verhalten der Abbildungsfunktion längs regulärer analytischer Begrenzungsstücke 206

§ 10. Verhalten der Abbildungsfunktion in Ecken und Spitzen, die von analytischen Kurvenbögen gebildet werden 209

§ 11. Behandlung der Frage der Ränderzuordnung im allgemeinsten Falle 212

§ 12. Analytische Spiegelung an einer *Jordan*-Kurve 219

§ 13. Die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildungsfunktion 221

Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins.

Von Herrn *G. Pólya* in Zürich.

Ich will in dieser Arbeit einige algebraische Sätze und Methoden auf ganze Funktionen vom Geschlechte 1 mit lauter reellen Wurzeln und Koeffizienten ausdehnen, bzw. auf solche ganzen Funktionen, die sich von den genannten nur um einen Faktor $e^{-\gamma x^2}$ $(\gamma > 0)$ oder eventuell um einen Faktor $R(x)$ unterscheiden, wo $R(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten bedeutet.

Ich will mit dieser Arbeit zum weiteren Ausbau derjenigen Untersuchungen beitragen, die von Herrn *J. Schur* und mir in dieser Zeitschrift veröffentlicht worden sind*). Ich werde mich auch fortwährend auf die Resultate der erwähnten Untersuchungen zu stützen haben. Diese Resultate machen die Ausdehnung algebraischer Sätze auf die oben charakterisierten ganzen Funktionen außerordentlich leicht und erklären zugleich den inneren Grund für die Möglichkeit einer solchen Ausdehnung. Man erkennt insbesondere, warum man sich naturgemäß eben auf die genannte Funktionenklasse beschränken muß.

Ich schließe mich auch einer Arbeit von Herrn *Jensen***) eng an, hauptsächlich in der konsequenten Benutzung gewisser von ihm eingeführten Polynomfolgen (vgl. A, § 6, IV).

---

*) Dieses Journal Bd. 144, S. 89—113. Die Arbeit wird im folgenden kurz mit „A“ zitiert.

**) Recherches sur la théorie des équations, Acta Mathematica, Bd. 36 (1913), S. 181—195.

In den §§ 1, 2 und 3 werde ich mich mit folgendem bekannten algebraischen Satz beschäftigen:

„Ist

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0)$$

ein Polynom mit lauter reellen Wurzeln und hat das Polynom $g(x)$ r reelle Wurzeln, so hat das Polynom

$$\begin{aligned} F(D)\,g(x) &= (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n)\,g(x) \\ &= a_0 g(x) + a_1 g'(x) + a_2 g''(x) + \cdots + a_n g^{(n)}(x) \end{aligned}$$

wenigstens r reelle Wurzeln."

(D soll das Symbol des Differenzierens sein. Die übliche Rechnung mit diesem Symbol wird hauptsächlich in § 2 einige Erleichterung gewähren. — $F(x)$ und $g(x)$ haben, so wie alle Polynome und Potenzreihen, die in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden, reelle Koeffizienten.)

Ich will über diesen Satz von *Hermite* und *Poulain* einige ganz elementare Bemerkungen machen, die aber in der Literatur nicht hervorgehoben zu sein scheinen und die ich in der Folge unumgänglich nötig habe. Ich widme diesen Bemerkungen den § 1, bevor ich zu den Anwendungen auf ganze Funktionen in den §§ 2 und 3 übergehe.

In den §§ 4 und 5 beweise ich einen allgemeinen Satz, der, auf die spezielle Funktion $\frac{1}{\Gamma(x)}$ angewendet, besagt, daß die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{\Gamma(x)}$ um irgendeinen Punkt der reellen Achse sowohl unendlichviele Zeichenwechsel, wie unendlichviele Zeichenfolgen aufweisen muß. Diese spezielle Folgerung aus unserem allgemeinen Satz ist wohl direkt aus den einfachsten Eigenschaften der Gammafunktion abzulesen.

§ 1.

*Elementare Bemerkungen zu dem Hermite-Poulainschen Satz**).

Sei

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

---

*) *Hermite*, Question 777, Nouvelles Annales des Mathématiques, 2e série, t. 5 (1866), p. 432 und Question 778, 779, a. a. O. p. 479. *Graindorge*, dieselbe Zeitschrift t. 5 (1866), p. 524. *Maffiotti*, dieselbe Zeitschrift t. 6 (1867), p. 76. *Poulain*, Théorèmes généraux sur les équations algébriques, dieselbe Zeitschrift t. 6 (1867), p. 21—33. Vgl. ferner für IV in *J. Schur*, Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, dieses Journal Bd. 144, S. 75—78, den Hilfssatz II auf S. 77.

ein Polynom mit nur reellen Wurzeln, und es sei $F(0) \gtrless 0$. Sei ferner $g(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und r reellen Wurzeln.

Ich betrachte das Polynom

$$H(x) = F(D)g(x) = a_0 g(x) + a_1 g'(x) + \cdots + a_n g^{(n)}(x)$$

und behaupte folgende Tatsachen:

I. *Die Anzahl der reellen Wurzeln des Polynoms $H(x)$ ist entweder r oder um eine gerade Zahl größer als r.*

II. *Ist $r \geqq 1$, so hat das Polynom $H(x)$ wenigstens eine reelle Wurzel von ungerader Vielfachheit und nimmt folglich für reelle Werte von x sowohl positive wie negative Werte an.*

III. *Ist $r \geqq 2$, so hat $H(x)$ wenigstens zwei verschiedene reelle Wurzeln.*

IV. *Hat $g(x)$ nur reelle Wurzeln, so sind alle mehrfachen Nullstellen von $H(x)$ notwendigerweise auch mehrfache Nullstellen von $g(x)$.*

V. *Ist $r \geqq 1$ und hat $F(x)$ nur positive Wurzeln, so hat $H(x)$ eine reelle Wurzel von ungerader Vielfachheit, die größer ist als die größte reelle Wurzel von $g(x)$.*

Bei allen diesen Aussagen ist dem Sinne der Sache gemäß angenommen, daß $F(x)$ keine Konstante ist. Indem ich noch über einen konstanten Faktor passend verfüge, darf ich

$$F(x) = (p-x)(q-x)\cdots(t-x), \quad H(x) = (p-D)(q-D)\cdots(t-D)g(x)$$

setzen, wo $p, q, \ldots t$ sämtlich reell und von Null verschieden sind. So entsteht $H(x)$ aus $g(x)$ durch Wiederholung ähnlicher Schritte, und man kann, die einzelnen Behauptungen durchgehend, sich leicht überzeugen, daß es genügt, nur einen Schritt zu betrachten, d. h. die Behauptungen I—V für das Polynom

$$h(x) = (t-D)g(x) = tg(x) - g'(x)$$

zu beweisen.

Ist $r = 0$, so haben wir nichts zu beweisen.

Ist $r \geqq 1$ und hat $g(x)$ genau eine Nullstelle $x = a$ von der Multiplizität r, so hat das Polynom $h(x)$ die Zahl $x = a$ zur $(r-1)$-fachen Nullstelle. Das Polynom $h(x)$ hat aber denselben Grad, wie $g(x)$, folglich müssen die Anzahlen der reellen Wurzeln der beiden Polynome mod. 2 übereinstimmen. Daher hat das Polynom $h(x)$ eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln, die von a *verschieden* sind, und so hat es auch wenigstens

eine reelle Wurzel von ungerader Multiplizität. In diesem Falle sind also I, II, III erwiesen.

Hat aber $g(x)$ mehrere voneinander verschiedene reelle Nullstellen $a, b, c, \dots l$

$$a < b < c < \cdots < l$$

bzw. von der Vielfachheit $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$

$$\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1, \dots\ \lambda \geqq 1,\ \alpha + \beta + \cdots + \lambda = r,$$

so betrachte man die Intervalle

$$(1.) \qquad a \leqq x < b,\ b \leqq x < c, \dots\ k \leqq x < l$$

und das unendliche Intervall, das aus den beiden Teilen $l \leqq x$ und $x < a$ besteht. Dann schließt man nacheinander:

Das Polynom $h(x)$ hat die Zahlen $x = a, b, \dots l$ bzw. zu $(\alpha - 1)$-, $(\beta - 1)$-, $\dots$ $(\lambda - 1)$-fachen Nullstellen. Ferner hat es im *Innern* von jedem der Intervalle (1.) eine ungerade Anzahl von Wurzeln, da für genügend kleines $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{sign} h(a + \varepsilon) = -\operatorname{sign} g'(a + \varepsilon) = \operatorname{sign} g'(b - \varepsilon) = -\operatorname{sign} h(b - \varepsilon)$$

usw. Daher hat $h(x)$ in jedem der einzelnen Intervalle (1.) entweder ebensoviel Wurzeln wie $g(x)$, oder es hat um eine gerade Zahl mehr Wurzeln als $g(x)$. Die Polynome $g(x)$ und $h(x)$ sind aber vom gleichen Grade, und so müssen die Anzahlen aller reellen Wurzeln der beiden Polynome mod. 2 übereinstimmen. Daraus schließt man, daß $h(x)$ im unendlichen Intervall $\lambda + 2\nu$ Wurzeln hat, wo $\nu \geqq 0$ ist.

$h(x)$ hat also wenigstens eine reelle Nullstelle von ungerader Vielfachheit — da wenigstens ein Intervall (1.) existiert.

$h(x)$ hat ferner (man hat jetzt $r \geqq 2$) wenigstens zwei verschiedene reelle Nullstellen: eine im Innern eines Intervalles (1.) und eine im Innern des unendlichen Intervalles.

Und da $h(x)$ sowohl in jedem der Intervalle (1.), wie auch im unendlichen Intervall ebensoviel oder mehr Wurzeln hat als $g(x)$, sind die Behauptungen I, II, III in allen Fällen erwiesen.

Hat nun $g(x)$ nur reelle Wurzeln, so kann $h(x)$ nicht mehr reelle Wurzeln haben als $g(x)$, und folglich hat $h(x)$ weder in einem Intervalle (1.), noch im unendlichen Intervall mehr Wurzeln als $g(x)$. Daher sind notwendigerweise alle von $a, b, c \dots l$ verschiedenen Wurzeln des Polynoms $h(x)$ einfach, und dies war die Behauptung IV.

Ich wende mich zum Beweise der letzten Behauptung V. Sei $t > 0$ und sei wieder l die größte reelle Wurzel von $g(x)$. Dann kann man eine genügend kleine positive Zahl ε finden, so daß

$$\operatorname{sign} g'(l+\varepsilon) = \operatorname{sign} g(l+\varepsilon) = \operatorname{sign} g(+\infty)$$

und zugleich

$$\operatorname{sign} h(l+\varepsilon) = \operatorname{sign} (t g(l+\varepsilon) - g'(l+\varepsilon)) = -\operatorname{sign} g'(l+\varepsilon)$$

ist. Nun ist andererseits (wegen $t > 0$)

$$\operatorname{sign} h(+\infty) = \operatorname{sign} g(+\infty),$$

und so muß $h(x)$ eine ungerade Anzahl von Wurzeln rechts von $l+\varepsilon$ haben. Hieraus folgt Behauptung V.

§ 2.

Über die Potenzreihenentwicklung der Reziproken einer ganzen Funktion vom Typus II.

Die Sätze, die ich in diesem Paragraphen beweisen werde, sind großen Teils die Erweiterungen bekannter Sätze über Polynome mit nur reellen Wurzeln. Die Sätze II—V scheinen jedoch bisher sogar in dem Falle eines Polynoms unbemerkt geblieben zu sein.

Die Übertragung von Sätzen über Polynome mit nur reellen Wurzeln auf ganze Funktionen vom Typus II, die eben die Grenzfälle solcher Polynome sind, bietet zwar in den zu betrachtenden Fällen keine großen Schwierigkeiten dar, aber es ist etwas Vorsicht dabei erforderlich. Man muß genau unterscheiden, was durch Grenzbetrachtungen geschlossen und was nicht geschlossen werden kann.

Hilfssatz I*). *Sei*

$$\Psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine Funktion vom Typus II ($a_0 \gtrless 0$), *und besitze das Polynom m-ten Grades $g(x)$ reelle Koeffizienten und r reelle Wurzeln. Dann hat das Polynom*

$$\Psi(D)g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu g^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu g^{(\nu)}(x)$$

wenigstens r reelle Wurzeln.

Man bestimme (nach A, § 2, II) eine Polynomfolge

$$\Psi_1(x),\ \Psi_2(x), \ldots\ \Psi_n(x), \ldots$$

mit nur reellen Wurzeln

*) Vgl. *Jensen*, a. a. O., S. 185—186.

$$\Psi_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + \cdots,$$

die für $|x| < \varrho$ $(\varrho > 0)$ gleichmäßig gegen $\Psi(x)$ konvergiert. Dann ist, von einem gewissen n an, $a_{n0} \neq 0$, und so hat nach dem *Hermite-Poulain*schen Satz das Polynom

$$\Psi_n(D)g(x) = a_{n0}g(x) + a_{n1}g'(x) + a_{n2}g''(x) + \cdots$$

wenigstens r reelle Wurzeln, also höchstens $m - r$ imaginäre Wurzeln. Folglich kann auch das Grenzpolynom $\Psi(D)g(x)$ höchstens $m - r$ imaginäre Wurzeln haben. $\Psi(D)g(x)$ ist aber (wegen $a_0 \neq 0$) vom Grade m und hat daher wenigstens r reelle Wurzeln. W. z. b. w.

Hilfssatz I gestattet uns (was wir nebenbei bemerken wollen), folgende Aufgabe zu lösen: „Man bestimme alle unendlichen Folgen von reellen Zahlen

(1.) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_n, \ldots$$

von der Beschaffenheit, daß, wenn $g(x)$ ein beliebiges Polynom mit nur reellen Wurzeln bedeutet, das Polynom

$$a_0g(x) + a_1g'(x) + a_2g''(x) + \cdots$$

stets nur reelle Wurzeln haben soll."

In der Tat, hat die Folge (1.) die gewünschte Eigenschaft, so haben die unendlichvielen Polynome

$$a_0x^n + na_1x^{n-1} + n(n-1)a_2x^{n-2} + \cdots + n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

notwendigerweise nur reelle Wurzeln — da das Postulat auch für $g(x) = x^n$ erfüllt sein muß. Daraus folgt aber, nach A, § 6, IV, daß die Reihe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

für jedes x konvergiert und eine Funktion vom Typus II darstellt.

Dies Resultat, zusammengefaßt mit dem (leicht modifizierten) Hilfssatz I, gestattet die Aussage:

„Damit die Folge (1.) die gewünschte Eigenschaft hat, ist notwendig und hinreichend, daß sie die Koeffizientenfolge einer Funktion vom Typus II ist."

Hilfssatz II. *Bedeutet*

$$\Phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \qquad (a_0 \neq 0)$$

eine Funktion vom Typus I *mit Koeffizienten von abwechselndem Vorzeichen und $g(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und mit wenigstens einer reellen Wurzel, so ist die größte reelle Wurzel des Polynoms*

$$\Phi(D)g(x) = a_0 g(x) + a_1 g'(x) + a_2 g''(x) + \cdots$$

nicht kleiner als die größte Wurzel von $g(x)$.

Man weiß (A, § 2, I), daß eine unendliche Folge von Polynomen

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \ldots\ \Phi_n(x), \ldots$$

mit lauter positiven Wurzeln existiert, die in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig gegen $\Phi(x)$ konvergiert.

Nach § 1, V der vorliegenden Arbeit ist die größte reelle Wurzel des Polynoms $\Phi_n(D)g(x)$ größer als die größte reelle Wurzel von $g(x)$. Beachtet man, daß die Polynome der Folge

$$\Phi_1(D)g(x),\ \Phi_2(D)g(x), \ldots\ \Phi_n(D)g(x), \ldots$$

den Grad von $g(x)$ haben, ebenso wie das Polynom $\Phi(D)g(x)$, gegen welches sie konvergieren, so ergibt sich nach einem leichten Schluß der Hilfssatz II. —

Sei $\Psi(x)$ eine Funktion vom Typus II, $\Psi(0) > 0$. Ich will nun, nach den getroffenen Vorbereitungen, einige Sätze über die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\Psi(x)} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

beweisen. Ich werde öfters $\Psi(x)$ zu einer Funktion vom Typus I mit Koeffizienten von abwechselndem Vorzeichen spezialisieren. Die so spezialisierte Funktion werde ich dann mit $\Phi(x)$ bezeichnen.

I. *Wenn das Polynom* $f(x)$ *reelle Koeffizienten und* w *reelle Wurzeln hat, so ist die Anzahl der reellen Wurzeln des Polynoms*

$$g(x) = \frac{1}{\Psi(D)} f(x) = b_0 f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + \cdots$$

entweder w *oder um eine gerade Zahl kleiner als* w.

Man bezeichne die Anzahl der reellen Wurzeln von $g(x)$ mit r. Es ist

$$\Psi(x)\,\frac{1}{\Psi(x)} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = 1,$$

also ist

$$\Psi(D)g(x) = (a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots)(b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots) f(x) = f(x).$$

Wendet man Hilfssatz I auf diesen speziellen Fall an, so erhält man

$$r \leqq w,$$

w. z. b. w.*)

---

*) Diese elegante Schlußweise rührt von *Poulain* her. Vgl. a. a. O., p. 28. Sein erster Beweis p. 25—27 (identisch mit dem von *Maffiotti*) ließe sich nicht auf unsern Fall übertragen.

Bezeichnet man für einen Moment die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x)$ mit $\{f(x)\}$, so lassen sich die bisher gewonnenen Resultate in die einzige Formel zusammenfassen:

$$\{b_0 f(x) + b_1 f'(x) + \cdots\} \leqq \{f(x)\} \leqq \{a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots\}.$$

Aus Satz I ergibt sich die Lösung folgender Aufgabe:

„Alle unendlichen Folgen von reellen Zahlen

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots\ b_n, \ldots \tag{2.}$$

zu bestimmen, die die beiden folgenden Eigenschaften haben:

1. $b_0 \neq 0$,
2. das Polynom

$$b_0 f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + \cdots$$

hat in keinem Falle mehr reelle Wurzeln als das Polynom $f(x)$."

Die Bedingung 2. besagt also, daß für jedes Polynom $f(x)$ die Ungleichung

$$\{b_0 f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + \cdots\} \leqq \{f(x)\}$$

erfüllt sein soll. —

Man bestimme die unendlichvielen Zahlen

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots\ a_n, \ldots$$

durch die Gleichungen

$$1 = a_0 b_0,$$
$$0 = a_1 b_0 + a_0 b_1,$$
$$0 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2.$$

Dies geht, da $b_0 \neq 0$ ist.

Ich behaupte, daß die Polynome

$$Y_n(x) = a_0 x^n + a_1 n x^{n-1} + a_2 n(n-1) x^{n-2} + \cdots + a_n n(n-1)\cdots 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nur reelle Wurzeln haben. In der Tat, man hat

$$b_0 Y_n(x) + b_1 Y_n'(x) + \cdots + b_n Y_n^{(n)}(x)$$
$$= (b_0 + b_1 D + \cdots + b_n D^n)(a_0 + a_1 D + \cdots + a_n D^n) x^n = x^n$$

und nach Bedingung 2. muß die Ungleichung

$$\{Y_n(x)\} \geqq \{b_0 Y_n(x) + b_1 Y_n'(x) + \cdots\} = \{x^n\} = n$$

bestehen. Da $Y_n(x)$ vom Grade n ist, muß zugleich $\{Y_n(x)\} \leqq n$ sein, und daraus resultiert

$$\{Y_n(x)\} = n.$$

Aus der Realität aller Wurzeln der Polynome $Y_n(x)$ folgt aber (A, § 6, IV), daß die Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

immer konvergiert und eine Funktion $\Psi(x)$ vom Typus II darstellt. Also ist notwendig, daß die Folge (2.) die Koeffizientenfolge einer Funktion $\frac{1}{\Psi(x)}$ ist; daß dies auch hinreichend ist, das besagt eben der Satz I. —

II. *Sei $\Psi(x)$ irgendeine Funktion vom Typus* II ($\Psi(0) > 0$), *nur nicht die Funktion $ce^{\delta x}$. Ist dann das Polynom $f(x)$ ($f(x) \not\equiv 0$) für reelle Werte von x keiner negativen Werte fähig, so ist das Polynom*

$$(3.) \qquad \frac{1}{\Psi(D)} f(x) = b_0 f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + \cdots$$

für alle reellen Werte von x positiv.

Die Funktionen vom Typus II ($\Psi(0) > 0$) zerfallen in zwei Klassen:

1. Solche Funktionen vom Typus II, die keine Wurzel haben. Alle diese Funktionen sind in der Formel

$$\Psi(x) = ce^{-\gamma x^2 + \delta x} \qquad (c > 0,\ \gamma \geqq 0,\ \delta \text{ reell})$$

enthalten.

2) Solche Funktionen vom Typus II, die Wurzeln haben. Ist $\Psi(x)$ eine solche Funktion und verschwindet sie für $x = \alpha$, so kann sie in die Form gesetzt werden

$$\Psi(x) = (x - \alpha)\,\Psi_1(x)$$

wo α reell, von Null verschieden und $\Psi_1(x)$ wieder eine Funktion vom Typus II ist.

Ich will Satz II zuerst für die zweiterwähnte, viel kompliziertere Klasse beweisen.

Das Polynom

$$f(x) = c_0 x^{2n} + c_1 x^{2n-1} + \cdots + c_{2n} \qquad (c_0 \neq 0)$$

hat für große Werte von x das Vorzeichen von c_0, also ist $c_0 > 0$. Das höchste Glied des Polynoms (3.) ist nun $b_0 c_0 x^{2n}$, und da $b_0 = \frac{1}{\Psi(0)} > 0$ ist, hat das Polynom (3.) für große Werte von x gewiß das positive Vorzeichen. Wir werden am Ziele sein, wenn wir gezeigt haben, daß (3.) keine reelle Wurzel besitzt. Nun sei das Gegenteil angenommen, nämlich daß (3.) r reelle Wurzeln hat, wo $r > 0$. Wir haben nach Voraussetzung

$$\Psi(x) = (\alpha - x)\,\Psi_1(x).$$

Das Polynom

$$\Psi_1(D) \cdot \frac{1}{\Psi(D)} f(x)$$

hat nun, nach Hilfssatz I, wenigstens r reelle Wurzeln. Daher müßte, nach § 1, II das Polynom

$$(\alpha - D) \cdot \Psi_1(D) \cdot \frac{1}{\psi(D)} f(x) = f(x)$$

sowohl positive wie negative Werte für reelle Argumente annehmen, was gegen die Voraussetzung ist.

Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn wir zugeben, daß $r = 0$ ist, d. h., daß (3.) keine reellen Wurzeln hat und für alle reellen Werte von x dasselbe Vorzeichen, das positive, beibehält, w. z. b. w.

Wenn nun $\Psi(x)$ eine Funktion der Klasse 1. und $f(x)$ wieder ein nichtnegatives Polynom bedeutet, so folgt aus dem eben Bewiesenen durch Grenzbetrachtungen die Ungleichung:

$$\frac{1}{\Psi(D)} f(x) \geqq 0. \tag{4.}$$

Wir haben aber diese Grenzbetrachtungen gar nicht nötig, denn wir können die Ungleichung (4.) an expliziten Formeln verifizieren und näher diskutieren.

Ist $\Psi(x) = e^{\delta x}$, so ist

$$\frac{1}{e^{\delta D}} f(x) = e^{-\delta D} f(x) = f(x) - \frac{\delta}{1!} f'(x) + \frac{\delta^2}{2!} f''(x) - \cdots = f(x - \delta).$$

In dem Falle $\Psi(x) = e^{\delta x}$ kann also das Zeichen $=$ in der Ungleichung (4.) erreicht werden.

Ist $\Psi(x) = e^{-x^2}$, so hat man

$$\frac{1}{e^{-D^2}} f(x) = e^{D^2} f(x) = f(x) + \frac{1}{1!} f''(x) + \frac{1}{2!} f^{IV}(x) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4}} f(x + t)\, dt.$$

Aus dieser Integralform von Herrn *Stridsberg*, sowohl wie aus den von Herren *Remak* und *Hurwitz* für dieses wichtige Beispiel gegebenen elementaren Beweisen geht hervor*), daß im Falle $\Psi(x) = e^{-x^2}$ stets das Zeichen $>$ in der Ungleichung (4.) das richtige ist. Daraus ist nun leicht zu schließen, daß auch stets

*) *Stridsberg*, Sur la démonstration de M. *Hilbert* du théorème de *Waring*, Mathematische Annalen Bd. 72 (1912); vgl. S. 148. *Remak*, Bemerkung zu Herrn *Stridsbergs* Beweis des *Waring*schen Theorems, Mathematische Annalen Bd. 72 (1912), S. 153—156. *Hurwitz*, Über definite Polynome, Mathematische Annalen, Bd. 73 (1913), S. 173—176.

$$\frac{1}{ce^{-\gamma D^2}+\delta D} f(x) = \frac{1}{c} e^{\gamma D^2} \cdot e^{-\delta D} f(x) = \frac{1}{c} e^{\gamma D^2} f(x-\delta) > 0$$

ist, wenn nur $\gamma > 0$. Also ist in der Tat $\Psi(x) = ce^{\delta x}$ der einzige Ausnahmefall, in welchem das Zeichen $=$ in der Ungleichung (4.) erreicht werden kann.

III. *Sei das Polynom* $f(x) \geqq 0$ *für* $x \geqq a$. *Sei ferner* $\Phi(x)$ $(\Phi(0) > 0)$ *irgendeine Funktion vom Typus* I *mit Koeffizienten von abwechselndem Vorzeichen, nur nicht die Funktion* $ce^{-\gamma x} (c > 0, \gamma \geqq 0)$. *Dann ist das Polynom*

$$(5.) \qquad \frac{1}{\Phi(D)} f(x) = b_0 f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + \cdots$$

positiv für $x \geqq a$.

Die gemachte Voraussetzung zieht nach sich, daß $\Phi(x)$ wenigstens eine Wurzel haben muß. Sei diese Wurzel α, dann ist $\alpha > 0$ und

$$\Phi(x) = (\alpha - x)\, \Phi_1(x),$$

wo $\Phi_1(x)$ wieder vom Typus I ist.

Sei

$$f(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots \qquad (c_0 \neq 0).$$

Es muß c_0 positiv sein, da $f(x)$ für große *positive* Werte von x positiv ist. Daher ist der Koeffizient der höchsten Potenz von x in dem Polynom (5.), d. h. die Zahl $b_0 c_0$, gewiß positiv.

Für große positive Werte von x wird daher das Polynom (5.) gewiß positive Werte haben, und so bleibt uns nur der Nachweis übrig, daß $f(x)$ eine Wurzel von ungerader Vielfachheit besitzt, die größer ist als alle Wurzeln von (5.), falls letztere überhaupt vorhanden sind.

Nun ist nach Hilfssatz II die größte Wurzel von

$$(6.) \qquad \Phi_1(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} f(x)$$

nicht kleiner als die größte Wurzel von (5.). Andererseits hat aber nach § 1, V das Polynom

$$(\alpha - D) \cdot \Phi_1(D) \cdot \frac{1}{\Phi(D)} f(x) = f(x)$$

eine Wurzel von ungerader Vielfachheit, die größer ist als die größte Wurzel von (5.), w. z. b. w.

In dem Falle

$$\Phi(x) = ce^{-\gamma x} \qquad (c > 0, \gamma \geqq 0)$$

muß das Polynom

$$\frac{1}{ce^{-\gamma D}} f(x) = \frac{1}{c} e^{\gamma D} f(x) = \frac{1}{c} f(x+\gamma)$$

für $x \geqq a$ gewiß $\geqq 0$ sein, aber der Fall $= 0$ kann wohl eintreten.

Eine sehr schöne Bestätigung unseres Satzes liefert das von Herrn *Hurwitz**) betrachtete Beispiel

$$\frac{1}{1-D} f(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots = \int_0^\infty f(x+t) e^{-t} dt.$$

Aus der Integraldarstellung geht mit Evidenz hervor, daß $\frac{1}{1-D} f(x) > 0$, wenn für $t \geqq 0$ $f(x+t) \geqq 0$ ist.

IV. *Alle Hauptdeterminanten der unendlichen Matrix*

$$(7.) \qquad \begin{pmatrix} b_0 & 1!\,b_1 & 2!\,b_2 & \dots \\ 1!\,b_1 & 2!\,b_2 & 3!\,b_3 & \dots \\ 2!\,b_2 & 3!\,b_3 & 4!\,b_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

sind positiv, wenn

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = \frac{1}{\Psi(x)},$$

wo $\Psi(x)$ *eine Funktion vom Typus* II, *verschieden von* $ce^{\delta x}$, *und* $\Psi(0) > 0$ *ist.*

Man setze mit Herrn *Remak* (vgl. a. a. O.)

$$f(x) = (u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n)^2,$$

dann ist nach Satz II

$$\left(\frac{1}{\Psi(D)} f(x)\right)_{x=0} = b_0 u_0^2 + b_1 1!\,(u_0 u_1 + u_1 u_0) + b_2 2!\,(u_0 u_2 + u_1^2 + u_2 u_0) + \cdots$$
$$= \sum_{i,k}^{0 \dots n} (i+k)!\, b_{i+k}\, u_i u_k > 0$$

für alle reellen Wertsysteme $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$, ausgenommen das einzige Wertsystem

$$u_0 = u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0.$$

Daraus ergibt sich Satz IV.

Bildet man die Matrix (7.) zu der Funktion $\Psi(x) = ce^{\delta x}$, so werden alle einreihigen Hauptdeterminanten positiv und alle in der Matrix enthaltenen Determinanten, die zwei oder mehr Reihen haben, verschwinden.

Aus Satz IV resultieren insbesondere die Ungleichungen

$$b_0 > 0,\ b_2 > 0,\ b_4 > , \dots$$

die schon *Laguerre* angegeben hat**).

---

*) Vgl. *Hurwitz* a. a. O. und „Über die Nullstellen der *Bessel*schen Funktionen", Mathematische Annalen Bd. 33 (1889), S. 259.

**) *Laguerre*, Oeuvres, t. I, p. 169. Für den Fall eines Polynoms vgl. den

V. *Ist*

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots = \frac{1}{\Phi(x)},$$

wo $\Phi(x)$ *irgendeine Funktion vom Typus* I *mit Koeffizienten von abwechselndem Vorzeichen bedeutet, die von* $ce^{-\gamma x} (\gamma \geqq 0)$ *verschieden und für* $x = 0$ *positiv ist, so sind alle Hauptdeterminanten der Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1!\,b_1 & 2!\,b_2 & 3!\,b_3 \dots \\ 2!\,b_2 & 3!\,b_3 & 4!\,b_4 \dots \\ 3!\,b_3 & 4!\,b_4 & 5!\,b_5 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{8.}$$

positiv.

Das Polynom

$$f(x) = x(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n)^2$$

ist $\geqq 0$ für $x \geqq 0$. Daher wird infolge des Satzes III

$$\left(\frac{1}{\Phi(D)} f(x)\right)_{x=0} = 1!\,b_1 u_0^2 + 2!\,b_2 (u_0 u_1 + u_1 u_0) + \cdots$$
$$= \sum_{i,k}^{0 \dots n} (i + k + 1)!\; b_{i+k+1} u_i u_k > 0,$$

wenn nicht alle die reellen Zahlen $u_0, u_1, \dots u_n$ verschwinden. —

Eine Funktion vom Typus I (mit Koeffizienten von abwechselndem Vorzeichen) gibt also zu zwei verschiedenen definit-positiven unendlichen Matrizes Anlaß, zu (7.) und zu (8.).

Es erhebt sich naturgemäß die Frage, ob und in welchem Sinne die Sätze IV und V umzukehren sind*). Mir gelang es nicht, diese Frage zu beantworten, sogar unter der Voraussetzung nicht, daß $\Psi(x)$ ein Polynom ist.

Die Positivität der beiden quadratischen Formen (7.) und (8.) bringt es mit sich, nach den tiefen Untersuchungen von *Stieltjes***) über das „problème des moments", daß das Polynom $\frac{1}{\Phi(D)} f(x)$ immer eine ähnliche

---

schönen Beweis bei *J. Grommer*, Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 144, S. 114, Kapitel II, § 6.

*) Genauer ist die Frage so: wenn $\sum_0^\infty b_n x^n$ die Entwicklung der Reziproken einer ganzen Funktion $^1\Psi(x)$ ist und wenn die Matrix (7.) definit positiv ist, läßt sich dann oder läßt sich nicht schließen, daß $^1\Psi(x)$ vom Typus II ist? — Herr *J. Grommer* erledigt a. a. O. verwandte Fragen.

**) *Stieltjes*, Recherches sur les fractions continues, Annales de la fac. des scienc. de Toulouse VIII (1894), IX (1895).

Integraldarstellung zuläßt, wie wir sie an dem Beispiel $\Phi(x) = 1 - x$ beobachtet haben. Ob auch das Polynom $\frac{1}{\Psi(D)} f(x)$ immer eine Integraldarstellung von der Art zuläßt, wie wir sie bei dem Beispiel $\Psi(x) = e^{-x^2}$ konstatiert haben, ist eine noch nicht streng entschiedene Frage. —

Jetzt gehe ich zu dem Beweise von zwei Sätzen über, die schon *Laguerre**) ohne Beweis angegeben hat.

VI. *Sei* $\Psi(x)$ *wieder von* $ce^{\delta x}$ *verschieden. Dann haben die Polynome*

$$(9.) \quad \frac{1}{\Psi(D)} x^n = b_0 x^n + b_1 n x^{n-1} + b_2 n(n-1) x^{n-2} + \cdots + b_n n(n-1) \cdots 1$$

nur eine reelle Wurzel bzw. keine reelle Wurzel, je nachdem n *ungerade oder gerade ist.*

Für gerades $n = 2m$ besagt VI nichts Neues, denn in diesem Falle ist $x^{2m} \geqq 0$, und unsere Behauptung ist im Satz II als spezieller Fall enthalten.

Ist aber $n = 2m + 1$, so kann das Polynom (9.) höchstens eine reelle Wurzel haben, denn seine Derivierte

$$D \frac{1}{\Psi(D)} x^{2m+1} = (2m+1) \frac{1}{\Psi(D)} x^{2m}$$

ist für jeden (reellen) Wert von x positiv, wie es eben festgestellt worden ist, und eine immer wachsende Funktion kann den Wert 0 (sowie irgendeinen andern Wert) nur einmal annehmen. Die Funktion $\Psi(x) = ce^{\delta x}$ nimmt wieder eine Sonderstellung ein, da

$$\frac{1}{ce^{\delta D}} x^n = \frac{1}{c} (x - \delta)^n$$

n (zusammenfallende) reelle Wurzeln hat.

Ich will Satz VI auf den Spezialfall $\Psi(x) = 1 - x$ anwenden. Es stellt sich hier heraus, daß das Polynom

$$\frac{1}{n!} \frac{1}{1-D} x^n = \frac{1}{n!} (x^n + n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} + \cdots + n(n-1) \cdots 2 \cdot 1)$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}$$

höchstens eine reelle Wurzel hat**). Diese Tatsache kann dem folgenden allgemeinen Satz subsumiert werden:

---

*) A. a. O., p. 169. *Laguerre* spricht den ersten der genannten Sätze (hier VI) inkorrekt aus, indem er den Ausnahmefall $\Psi(x) = ce^{\delta x}$ nicht beachtet.

**) Vgl. *Sylvester*, Mathematical Papers, vol. II, p. 516. — *Graindorge*, Nouvelles Annales des Mathématiques, 2e série, t. 5 (1866), p. 522.

VII. *Die Abschnitte der Potenzreihenentwicklung von* $\frac{1}{\Psi(x)}$, *d. h. die Polynome*

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{10.}$$

haben höchstens eine reelle Wurzel.

Der Satz ist für $\Psi(x) = e^{-x}$ (wie wir es eben gesehen haben), also offenbar auch für $\Psi = ce^{\delta x}$ richtig. Wir wollen daher $\Psi(x) \equiv ce^{\delta x}$ voraussetzen und uns auf Satz VI stützen.

Jetzt kann man mit *Laguerre* so verfahren: nach einem seiner Sätze*) hat das Polynom

$$\frac{b_0 x^n}{n!} + \frac{b_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b_2 x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + b_n \tag{11.}$$

entweder ebensoviel oder mehr reelle Wurzeln als das Polynom (10.). Multipliziert man aber (11.) mit $n!$, so erhält man das Polynom (9.), von welchem eben bewiesen wurde, daß es höchstens eine reelle Wurzel hat. Daher wäre es widersprechend, anzunehmen, daß (10.) mehr als eine reelle Wurzel hat.

Laguerre hat an anderer Stelle einen sehr schönen Beweis für den Fall gegeben, wo $\Psi(x)$ ein Polynom ist, aber seine Argumentation für den Fall $\Psi(x) = e^x$ scheint mir unzureichend zu sein**).

§ 3.

Ausdehnung des Hermite-Poulainschen Satzes auf gewisse Paare von ganzen Funktionen. Anwendung auf Besselsche Funktionen und Hermitesche Polynome.

Sei die ganze Funktion

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!} x + \frac{\alpha_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \cdots$$

vom Typus I *und ohne negative Koeffizienten, ferner sei die ganze Funktion*

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\beta_n}{n!} x^n + \cdots$$

---

*) A. a. O., p. 31 und p. 201.

**) A. a. O., p. 110—112 und p. 113. *Laguerre* verfällt an dieser Stelle, wie an manchen anderen (vgl. z. B. p. 9, 29, 113, 157, 198 seiner Oeuvres, t. I) in einen sehr elementaren Fehler, den ich an anderem Ort schon genügend auseinandergesetzt habe. Vgl. Sur un théorème de *Laguerre*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 156 (1913, 1), p. 996, Fußnote.

vom Typus II. *Dann konvergieren die vier Reihen*

$$(1.)\quad \sum_0^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\,\Psi^{(\nu)}(x), \qquad (2.)\quad \sum_0^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\,x^\nu\,\Psi^{(\nu)}(x),$$

$$(3.)\quad \sum_0^\infty \frac{\beta_\nu}{\nu!}\,\Phi^{(\nu)}(x), \qquad (4.)\quad \sum_0^\infty \frac{\beta_\nu}{\nu!}\,x^\nu\,\Phi^{(\nu)}(x)$$

für jedes x *und stellen ganze Funktionen vom Typus* II *dar.*

In dem Beweis für die *Konvergenz* werde ich in dem, was $\Psi(x)$ betrifft, nur von der Tatsache Gebrauch machen, daß $\Psi(x)$ ganz ist, d. h., daß die Reihe

$$M(x) = |\beta_0| + \frac{|\beta_1|}{1!}\,x + \cdots + \frac{|\beta_n|}{n!}\,x^n + \cdots$$

für jedes x konvergiert.

Von den Eigenschaften der Funktion $\Phi(x)$ genügt es, folgende zu benutzen: erstens, daß die Funktionen

$$\Phi^{(q)}(x) = \alpha_q + \frac{\alpha_{q+1}}{1!}\,x + \cdots + \frac{\alpha_{q+n}}{n!}\,x^n + \cdots,$$

$$\Phi(x+\varrho) = \Phi(\varrho) + \frac{\Phi'(\varrho)}{1!}\,x + \frac{\Phi''(\varrho)}{2!}\,x^2 + \cdots \qquad (\varrho > 0)$$

wieder vom Typus I sind, und zweitens, daß, falls $\alpha_0 > 0$ ist, die Ungleichung

$$(5.)\qquad 0 \leqq\!\leqq \alpha_\nu \leqq\!\leqq \alpha_0\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht (vgl. A, § 2, Formel (8.)). Aus der letzterwähnten Tatsache folgt leicht, wenn $\alpha_q > 0$ ist, die Ungleichung

$$(5'.)\qquad 0 \leqq\!\leqq \alpha_\nu \leqq\!\leqq \alpha_q\left(\frac{\alpha_{q+1}}{\alpha_q}\right)^{\nu-q}, \qquad (\nu = q, q+1, \ldots)$$

und daß in allen Fällen die Ungleichung besteht

$$(5''.)\qquad 0 \leqq\!\leqq \Phi^{(\nu)}(\varrho) \leqq\!\leqq \Phi(\varrho)\left(\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)}\right)^\nu \qquad (\varrho > 0).$$

Die Ungleichung (5'.) und (5''.) erhält man, indem man die Ungleichung (5.) auf die Funktionen $\Phi^{(q)}(x)$ und $\Phi(x+\varrho)$ anwendet.

Sei $\varrho > 0$, $|x| \leqq\!\leqq \varrho$. Die vier Reihen (1.), (2.), (3.), (4.) werden dann bzw. durch die vier folgenden Reihen majorisiert:

$$(1'.)\qquad \sum_0^\infty \frac{\alpha_0\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^\nu}{\nu!}\,M^{(\nu)}(\varrho) = \alpha_0 M\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \varrho\right),$$

$$(2'.)\qquad \sum_0^\infty \frac{\alpha_0\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^\nu}{\nu!}\,\varrho^\nu M^{(\nu)}(\varrho) = \alpha_0 M\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\,\varrho + \varrho\right),$$

$$(3'.) \qquad \sum_0^\infty \frac{|\beta_\nu|}{\nu!}\Phi(\varrho)\left(\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)}\right)^\nu = \Phi(\varrho)M\left(\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)}\right),$$

$$(4'.) \qquad \sum_0^\infty \frac{|\beta_\nu|}{\nu!}\varrho^\nu\Phi(\varrho)\left(\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)}\right)^\nu = \Phi(\varrho)M\left(\varrho\,\frac{\Phi'(\varrho)}{\Phi(\varrho)}\right).$$

Bei der Aufstellung der Majorantenreihen (1'.), (2'.) machte ich die Annahme, daß $\alpha_0 > 0$ ist, und bediente mich der Ungleichung (5.). Wäre $\alpha_0 = 0$, $\alpha_q > 0$, so könnte man sich mit ähnlichem Erfolg auf die Ungleichung (5'.) stützen. Bei Aufstellung von (3'.) und (4'.) wurde von der Ungleichung (5''.) Gebrauch gemacht. —

Bei dem Beweise dafür, daß die immer konvergierenden Reihen (1.), (2.), (3.), (4.) ganze Funktionen vom Typus II darstellen (d. h. Funktionen vom Geschlecht 1 ohne imaginäre Wurzeln, multipliziert mit einem Faktor $e^{-\gamma x^2}$, wo $\gamma \geqq 0$), muß ich *algebraische* Sätze heranziehen: den *Hermite-Poulain*schen Satz bei dem Beweise für (1.) und (3.), und den Satz A, § 5, 5. bei dem Beweise für (2.) und (4.).

Ich will mich auf den Beweis für (1.) beschränken. Ordnet man kraft des *Weierstraß*schen Fundamentalsatzes nach Potenzen von x

$$\sum_0^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\,\Psi^{(\nu)}(x) = \sum_0^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\left(\beta_\nu + \frac{\beta_{\nu+1}}{1!}x + \frac{\beta_{\nu+2}}{2!}x^2 + \cdots\right)$$
$$= \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1!}x + \frac{\gamma^2}{2!}x^2 + \cdots,$$

so erhält man die Koeffizienten

$$\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1!} + \frac{\alpha_2\beta_2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha_\nu\beta_\nu}{\nu!} + \cdots,$$

$$(6.) \qquad \gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \frac{\alpha_1\beta_2}{1!} + \frac{\alpha_2\beta_3}{2!} + \cdots + \frac{\alpha_\nu\beta_{\nu+1}}{\nu!} + \cdots,$$

$$\gamma_2 = \alpha_0\beta_2 + \frac{\alpha_1\beta_3}{1!} + \frac{\alpha_2\beta_4}{2!} + \cdots + \frac{\alpha_\nu\beta_{\nu+2}}{\nu!} + \cdots.$$

Man überzeugt sich leicht, entweder mit Hilfe der Ungleichungen (5.), (5'.) und der eben entwickelten Methode oder aus A, § 6, V, daß die Reihen (6.) absolut konvergieren.

Man betrachte die Polynome

$$\Phi_n(x) = \alpha_0 + \binom{n}{1}\alpha_1\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\alpha_2\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\alpha_n\frac{x^n}{n^n},$$

$$\Psi_n(x) = \beta_0 + \binom{n}{1}\beta_1\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\beta_2\frac{x^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\beta_n\frac{x^n}{n^n},$$

die nur reelle Wurzeln haben (A, § 6, IV). Das Polynom

$$\Phi_n(D)\,\Psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\alpha_\nu\,\frac{\Psi_n^{(\nu)}(x)}{n^\nu} = \gamma_{n0} + \frac{\gamma_{n1}}{1!}\,x + \cdots + \frac{\gamma_{nn}}{n!}\,x^n$$

hat *lauter reelle Wurzeln.* Man hat

$$\begin{aligned}\gamma_{n\nu} = {}& \alpha_0\beta_\nu\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\nu-1}{n}\Big)\\ &+\frac{\alpha_1\beta_{\nu+1}}{1!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\nu}{n}\Big)\\ &+\frac{\alpha_2\beta_{\nu+2}}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{\nu+1}{n}\Big)\\ &+\cdots,\end{aligned}$$

und man schließt leicht aus der absoluten Konvergenz der Reihen (6.), daß

$$\text{(7.)}\qquad \lim_{n=\infty}\gamma_{n\nu} = \gamma_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus dem Bestehen der unendlich vielen Gleichungen (7.) folgt aber schon, daß die Reihe $\sum_0^\infty \frac{\gamma_\nu}{\nu!}\,x^\nu$ eine Funktion vom Typus II darstellt (nach A, § 6, VI). W. z. b. w.

Man setze z. B.

$$\Phi(x) = I_0(\sqrt{-x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2\nu}\,\nu!}\,\frac{x^\nu}{\nu!},$$

so hat man

$$I_n(\sqrt{-x}) = (\sqrt{-x})^n 2^n \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+2\nu}(n+\nu)!}\,\frac{x^\nu}{\nu!} = (\sqrt{-x})^n 2^n\,\Phi^{(n)}(x).$$

Schreibt man nun in Formel (3.) bzw. (4.) $\Psi(2x)$ bzw. $\Psi(-2x)$ anstatt $\Psi(x)$ und ersetzt man im Resultat x durch $-x$, so erhält man den Satz:

Ist $\Psi(x) = \sum_0^\infty \frac{\beta_\nu}{\nu!}\,x^\nu$ *vom Typus* II, *so sind die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}\,x^{-\frac{n}{2}}\,I_n(x^{\frac{1}{2}}), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}\,x^{+\frac{n}{2}}\,I_n(x^{\frac{1}{2}})$$

überall konvergent und stellen wieder Funktionen vom Typus II *dar.*

Bezeichnet man mit $U_n(x)$ das n-te *Hermite*sche Polynom, so hat man ähnlich:

Ist $\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\alpha_\nu}{\nu!}\,x^\nu$ *vom Typus* I, *ohne negative Koeffizienten, so sind die Reihen*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}\,U_n(x), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}\,x^n U_n(x)$$

überall konvergent und stellen Funktionen vom Typus II *dar.*

Bei dem Beweise des letzteren Satzes benutzt man die Tatsache

$$\frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n} = e^{-\frac{x^2}{2}} (-1)^n U_n(x),$$

aber es genügt nicht das einfache Einsetzen der Funktion $\Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ in die Formel (1.) und (2.), sondern man bedarf noch (um mit $e^{-\frac{x^2}{2}}$ wegdividieren zu können) eines ähnlichen Gedankenganges, wie im Zusatz zu A, § 6, I.

Ich mache auf die Menge der in diesen Sätzen enthaltenen speziellen Resultate aufmerksam. Schon folgende scheinen mir neu zu sein: Wenn λ und μ irgend zwei reelle Zahlen sind, so haben die Funktionen

$$\lambda \sqrt{x} I_n(\sqrt{x}) + \mu I_{n+1}(\sqrt{x}), \qquad \lambda I_n(\sqrt{x}) + \mu \sqrt{x} I_{n+1}(\sqrt{x})$$

nur reelle Wurzeln. — Ersetzt man in einem Polynom mit lauter reellen Wurzeln x^n durch das n-te *Hermite*sche Polynom, so erhält man wieder ein Polynom mit nur reellen Wurzeln.

Zusatz I. *Bedeuten in Formel* (1.) *sowohl* $\Phi(x)$ *wie* $\Psi(x)$ *Funktionen vom Typus* I, *mit nicht negativen Koeffizienten, so stellt* (1.) *eine Funktion vom Typus* I *dar.*

Dann hat nämlich das Polynom $\Phi_n(D)\Psi_n(x)$ nur reelle *negative* Wurzeln.

Zusatz II. *Bedeuten in Formel* (1.) *sowohl* $\Phi(x)$ *wie* $\Psi(x)$ *Funktionen vom Typus* II, *so kann man zwar im allgemeinen die Konvergenz der Reihe* (1.) *nicht behaupten, jedoch man kann behaupten, daß sie, falls sie für* $|x| < \varrho\ (\varrho > 0)$ *konvergiert, notwendigerweise eine ganze Funktion vom Typus* II *darstellt.*

Aus der Konvergenz der Reihe (1.) schließt man nach dem *Weierstraß*schen Doppelreihensatz die Konvergenz der Reihen (6.). Aber aus der bloßen *Konvergenz* der Reihen (6.) folgt schon die Gültigkeit der Formeln (7.), nach heutzutage allgemein gebräuchlichen Methoden*).

Sei z. B. $\Phi(x) = \cos \omega x$ und $\Psi(x)$ irgend eine andere Funktion vom Typus II. Die Reihe

$$\cos \omega D \cdot \Psi(x) = \Psi(x) - \frac{\omega^2}{2!} \Psi''(x) + \frac{\omega^4}{4!} \Psi^{IV}(x) - \cdots$$
$$= \frac{\Psi(x + \omega i) + \Psi(x - \omega i)}{2}$$

*) Vgl. z. B. *Lebesgue,* Séries trigonométriques, S. 40.

konvergiert ersichtlich für jedes x, folglich fällt sie unter Zusatz II und hat lauter reelle Wurzeln — was übrigens dem *Biehler*schen Satze ebenfalls zu entnehmen ist*).

Zusatz III. *Bedeuten wieder sowohl* $\Phi(x)$ *wie* $\Psi(x)$ *Funktionen vom Typus* II, *und setzt man zwar nicht die Konvergenz von* (1.), *sondern nur das voraus, daß sämtliche Reihen* (6.), *d. h. die Koeffizienten in der formal umgeordneten Reihe* (1.), *konvergieren, so stellt die aus* (1.) *durch formale Umordnung zu bildende Potenzreihe eine Funktion vom Typus* II *dar.*

Für die Richtigkeit dieses Satzes bürgt das Bestehen der Relationen (7.), infolge von A, § 6, VI.

Man setze z. B.

$$(8.) \qquad \Phi(x) = e^{-\frac{zx^2}{2}} \quad (z > 0), \qquad \Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Die Werte von

$$\begin{array}{lllll} \alpha_0, & \alpha_1, & \alpha_2, \dots & \alpha_{2\nu-1}, & \alpha_{2\nu}, \dots, \\ \beta_0, & \beta_1, & \beta_2, \dots & \beta_{2\nu-1}, & \beta_{2\nu}, \dots \end{array}$$

sind in diesem Falle bzw.

$$\begin{array}{llll} 1, & 0, & -1z, \dots & 0, \quad (-1)^\nu 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)z^\nu, \dots, \\ 1, & 0, & -1, \dots & 0, \quad (-1)^\nu 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1), \dots. \end{array}$$

Daher ist

$$\gamma_0 = 1 + \frac{1.1}{2!}z + \frac{1.3.1.3}{4!}z^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\nu!}z^\nu + \cdots,$$

$$\gamma_1 = 0,$$

$$-\gamma_2 = 1 + \frac{1.1.3}{2!}z + \frac{1.3.1.3.5}{4!}z^2 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-1)\cdot 2\nu+1}{2\nu!}z^\nu + \cdots,$$

$$\cdots.$$

So erhält man das Resultat: Ist $0 < z < 1$, so konvergieren die Reihen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ und man hat bzw.

$$\gamma_0 = \frac{1}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}, \quad -\gamma_2 = 1\,\frac{1}{(1-z)^{\frac{3}{2}}}, \quad \gamma_4 = 1\cdot 3\,\frac{1}{(1-z)^{\frac{5}{2}}}, \dots,$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = \cdots = 0.$$

Die aus der formal angeschriebenen Reihe

$$e^{-\frac{z}{2}D^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\nu!}z^\nu \frac{d^{2\nu}e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{2\nu}}$$

durch Umordnung erhaltene Potenzreihe stellt die Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-z}}e^{-\frac{x^2}{2(1-z)}}$

*) *Laguerre*, a. a. O. p. 168.

dar, die gewiß vom Typus II ist. — Ist aber $z \geqq 1$, so divergieren die Reihen $\gamma_0, \gamma_2, \gamma_4, \ldots$ und die Funktionen (8.) geben das Beispiel eines Funktionenpaares vom Typus II, für welches die Reihe (1.) in keinem den Punkt $x = 0$ umschließenden Kreis konvergieren kann.

§ 4.

Die Funktionen vom Typus I* *und* II*.

Ich werde in den nun folgenden beiden Paragraphen zwei neue Klassen von ganzen Funktionen betrachten. Ich nenne eine ganze Funktion „Funktion vom Typus I*", wenn sie gleich dem Produkte einer ganzen Funktion vom Typus I und eines Polynoms mit reellen Koeffizienten ist. Ist $F(x)$ vom Typus I*, so hat entweder $F(x)$ oder $F(-x)$ die Form

$$(\text{I}^*) \qquad c x^r e^{\gamma x} \prod_{\mu=1}^{T} (1 + \beta_\mu x) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \gamma_\nu x),$$

wo $\gamma \geqq 0$, $\gamma_\nu \geqq 0$ und das Polynom $\prod_{\mu=1}^{T}(1+\beta_\mu x)$ reelle Koeffizienten hat.

Ähnlich heiße das Produkt einer Funktion vom Typus II und eines Polynoms mit reellen Koeffizienten eine „Funktion vom Typus II*". Eine solche Funktion hat die Form

$$(\text{II}^*) \qquad c x^r e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\mu=1}^{\tau} (1 + \beta_\mu x)(1 + \bar{\beta}_\mu x) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x) e^{-\delta_\nu x}$$

($\gamma \geqq 0$, β_μ und $\bar{\beta}_\mu$ konjugiert komplex, δ, δ_ν reell, $\sum_1^\infty \delta_\nu^2$ konvergent). Kurz eine Funktion vom Typus II* ist das Produkt der Funktion $e^{-\gamma x^2} (\gamma \geqq 0)$ und einer ganzen Funktion vom Geschlecht 0 oder 1, mit reellen Koeffizienten und mit einer *endlichen* Anzahl von imaginären Wurzeln.

Die Einführung dieser Funktionen rechtfertigt sich durch folgende Sätze:

I. *Eine Funktion vom Typus* I* *läßt sich immer als Grenzwert einer in jedem endlichen Gebiete gleichmäßig konvergierenden Polynomfolge darstellen, wo jedes Polynom der Folge reelle Koeffizienten und höchstens eine bestimmte Anzahl T von Wurzeln außerhalb der negativen (bzw. positiven) reellen Achse hat. — Umgekehrt, unterliegen die Polynome einer Folge den eben besagten Bedingungen, betreffend die Koeffizienten und die Verteilung der Wurzeln, und konvergiert die Folge in irgend einem Gebiete gleichmäßig, so ist ihr Grenzwert eine Funktion vom Typus* I*.

II. *Jede Funktion vom Typus* II* *läßt sich als der Grenzwert einer in jedem endlichen Gebiet gleichmäßig konvergierenden Folge von Polynomen darstellen, von denen keines imaginäre Koeffizienten oder mehr als* 2τ *imaginäre Wurzeln hat.*

Umgekehrt, konvergiert eine Polynomfolge, deren Polynome die besagten Eigenschaften haben, in irgend einem Gebiete der Ebene gleichmäßig, so ist die Grenzfunktion eine ganze Funktion vom Typus II*.

Ich muß für den Beweis dieser Sätze auf andere Arbeiten verweisen*).

Der *erste Teil* dieser Sätze geht aus dem Beweise der Sätze A, § 2, I und A, § 2, II genügend hervor.

Der Beweis des *zweiten Teiles* findet sich in den Arbeiten C (vgl. Satz I) und D (vgl. Sätze II und III) — bis auf die Bestimmung des Vorzeichens von γ in den Formeln (I*) und (II*). Diese Bestimmung wird in A, § 2, I und II, sowohl wie in B, Sätze I und II für den Fall $T = 0$ bzw. $2\tau = 0$ durchgeführt. Den allgemeinen Fall $T \geqq 0$ $(2\tau \geqq 0)$ auf diesen speziellen zurückzuführen, bedarf man einer etwas langwierigen Überlegung, die jedoch keine Schwierigkeit darbietet, und die ich hier wohl unterdrücken kann. Ich eile lieber meinem Endziel, dem Beweise des Satzes des folgenden § 5 zu, zu dessen Vorbereitung ich noch folgender Sätze bedarf.

III. *Stellt die Potenzreihe*

$$(1.) \qquad a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n + \cdots$$

eine Funktion vom Typus I* *und von der Form* (I*) *mit höchstens* T *Wurzeln außerhalb der negativen reellen Achse dar, so haben die Polynome*

$$(2.) \qquad a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

ebenfalls höchstens T *Wurzeln außerhalb der reellen negativen Achse.*

---

*) B) *Pólya*, Über Annäherung durch Polynome mit nur reellen Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 36 (1913, 2), p. 279—295. C) *Pólya*, Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse. 1913. D) *Lindwart* und *Pólya*, Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 37 (1914, 1).

Haben umgekehrt alle Polynome (2.) *reelle Koeffizienten und höchstens* T *Wurzeln außerhalb der negativen reellen Achse, so liegt die Alternative*) vor: entweder hat die Reihe* (1.) *den Konvergenzradius* 0, *oder sie hat den Konvergenzradius* ∞ *und stellt eine Funktion vom Typus* I* *dar.*

IV. *Stellt die Potenzreihe* (1.) *eine Funktion vom Typus* II* *mit höchstens* 2τ *imaginären Wurzeln dar, so haben die Polynome* (2.) *ebenfalls höchstens* 2τ *imaginäre Wurzeln. Umgekehrt, wenn die Polynome* (2.) *reelle Koeffizienten und höchstens* 2τ *imaginäre Wurzeln haben, dann sind nur zwei Fälle möglich: entweder hat die Potenzreihe* (1.) *den Konvergenzradius* 0, *oder den Konvergenzradius* ∞, *und im letzteren Falle stellt sie eine Funktion vom Typus* II* *dar.*

Diese Sätze sind schon zum großen Teil von *Laguerre* und von *Jensen* angegeben worden (vgl. A, § 6, IV); ich will mich hier auf den Beweis von III beschränken, und ich will $a_0 \neq 0$ voraussetzen.

Gesetzt also, daß die Reihe (1.) eine Funktion vom Typus I* darstellt, bestimme man nach Satz I eine Polynomfolge

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x), \dots \Phi_k(x), \dots,$$

$$\Phi_k(x) = a_{k0} + \frac{a_{k1}}{1}x + \dots + \frac{a_{kk}}{k!}x^k,$$

so daß $\Phi_k(x)$ $(k = 1, 2, 3 \dots)$ höchstens T nicht negative Wurzeln hat, und daß

$$\lim_{k=\infty} \Phi_k(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \dots$$

ist. Daraus folgt:

$$\lim_{k=\infty} a_{k\nu} = a_\nu. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Ferner hat, nach einem schon benutzten Satze von *Laguerre***), das Polynom

$$\frac{1}{k!}\Phi_k(D)x^k = \frac{a_{k0}x^k}{k!} + \frac{a_{k1}x^{k-1}}{1!(k-1)!} + \frac{a_{k2}x^{k-2}}{2!(k-2)!} + \dots,$$

wenigstens $k - T$ negative reelle Wurzeln, und so hat das Polynom

$$\frac{n!}{k!}D^{k-n}\Phi_k(D)x^k = \Phi_k(D)x^n = a_{k0}x^n + \binom{n}{1}a_{k1}x^{n-1} + \dots$$

nach dem *Rolle*schen Satze wenigstens

---

*) Vermutlich ist der Fall, daß der Konvergenzradius 0 wird, auszuschließen. Mir genügt jedoch hier auch der im Text angegebene weniger scharfe Satz.

**) A. a. O. S. 31, 201.

$$(k-T)-(k-n)=n-T$$

negative reelle Wurzeln, also höchstens T Wurzeln außerhalb der negativen reellen Achse. Daher kann dasselbe von dem Polynom

$$\lim_{k=\infty} \Phi_k(D)x^n = a_0x^n + \binom{n}{1}a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

behauptet werden, und dies mußte ich zuerst beweisen.

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, daß das Polynom (2.), das ich für einen Moment mit $Y_n(x)$ bezeichnen will, höchstens T nicht negative Wurzeln hat, und daß die Reihe (1.) für $|x|<\varrho$ konvergiert ($\varrho>0$). Dann hat man, gleichmäßig im Kreise $|x|\leqq\varrho(1-\varepsilon)$

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n}{n^n}Y_n\left(\frac{n}{x}\right)=\lim_{n=\infty}\left(a_0+a_1\binom{n}{1}\frac{x}{n}+a_2\binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2}+\cdots\right)$$

$$=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots.$$

Also ist die Reihe (1.) im Kreise $|x|\leqq\varrho(1-\varepsilon)$ der Grenzwert einer gleichmäßig konvergierenden Folge von Polynomen, wo jedes Polynom reelle Koeffizienten hat und kein Polynom mehr als T nicht negative Wurzeln besitzt. Nach dem zweiten Teile des Satzes I dieses Paragraphen stellt also die Reihe (1.) eine ganze Funktion vom Typus I* dar, und ist folglich überall konvergent, w. z. b. w.

§ 5.

Über die Koeffizienten der Funktionen vom Typus I* *und* II*.

So habe ich die nötigen Vorbereitungen getroffen zum Beweise von folgendem Satze:*)

Damit eine Funktion $F(x)$ vom Typus II* *nicht zugleich eine Funktion vom Typus* I* *ist, dazu ist notwendig und hinreichend, daß die Reihenentwicklung*

$$(1.)\qquad F(x)=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots$$

sowohl unendlichviele Zeichenwechsel wie auch unendlichviele Zeichenfolgen aufweist.

Bei Abzählung der *Zeichenwechsel* werden die verschwindenden Koeffizienten überhaupt nicht in Betracht gezogen (wie das in der Algebra

*) Vgl. A, § 6, III.

üblich ist). Unter der Anzahl der *Zeichenfolgen* verstehe ich die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihenentwicklung

$$F(-x) = a_0 - \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 - \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots .$$

Nach dieser Definition weist z. B. die Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

sowohl unendlichviele Zeichenfolgen, wie auch unendlichviele Zeichenwechsel auf, während die Reihe

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$$

nur Zeichenwechsel und keine einzige Zeichenfolge hat. —

Zum Beweise unseres Satzes muß zuerst gezeigt werden, daß die Funktion $F(x)$, falls sie vom Typus II* ist und ihre Reihenentwicklung (1.) nur eine endliche Anzahl von Zeichenwechseln aufweist, notwendigerweise auch vom Typus I* sein muß.

In der Tat, nach Voraussetzung und infolge von Satz IV des vorangehenden § 4 hat keines der unendlichvielen Polynome (mit reellen Koeffizienten)

$$(2.) \qquad a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

mehr imaginäre Wurzeln als eine bestimmte Anzahl 2τ. Aber ebenfalls nach Voraussetzung hat keines dieser Polynome mehr Zeichenwechsel als eine gewisse fixe Anzahl W, und somit kann nach der *Descartes*schen Regel keines dieser Polynome mehr positive Wurzeln haben als W. Da aber keines der Polynome (2.) mehr als $2\tau + W$ Wurzeln außerhalb der negativen reellen Achse hat, stellt infolge von Satz III des § 4, die Reihe (1.) eine Funktion vom Typus I* dar, w. z. b. w.

Zweitens soll gezeigt werden, daß, wenn $F(x)$ die in Formel (I*) angegebene Produktzerlegung hat, die Reihenentwicklung (1.) höchstens T Zeichenwechsel aufweist. Das Polynom (2.) darf nun höchstens $T + r$ nicht negative Wurzeln haben und seine Entwicklung muß (nach der *Descartes*schen Regel) wenigstens so viel Zeichenfolgen aufweisen, als negative Wurzeln da sind. Nimmt man nun die Tatsache hinzu, daß die Anzahl der Zeichenfolgen vermehrt um die Anzahl der Zeichenwechsel $\leq$ ist als die Anzahl der von Null verschiedenen Wurzeln, so wird einleuchten, daß wirklich höchstens T Zeichenwechsel in irgend einem Polynom (2.) zu

finden sind. Daher kann auch (1.) nicht mehr Zeichenwechsel haben. —

Z. B. die Funktion

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

ist vom Typus II* (sogar vom Typus II), aber sie ist gewiß nicht vom Typus I*. Daher muß ihre Reihenentwicklung sowohl unendlichviele Zeichenwechsel wie auch unendlichviele Zeichenfolgen enthalten*).

Für gewisse Untersuchungen über die *Descartes*sche Zeichenregel**) ist insbesondere jene Folgerung von Belang, daß die Entwicklungen der Funktionen

$$e^{kx} \frac{1}{\Gamma(x)}, \qquad (1+x)^k \frac{1}{\Gamma(x)}$$

nach Potenzen von x bei noch so großem positivem ganzem k unendlichviele Zeichenwechsel aufweisen müssen, obzwar die Funktionen keine positiven Wurzeln haben.

Hier wurde mit Hilfe unseres Satzes aus der Kenntnis der Produktzerlegung die Art der Verteilung der Vorzeichen in der Reihenentwicklung erschlossen. Der Satz kann aber auch umgekehrt dazu benutzt werden, aus der Kenntnis der Vorzeichenverteilung und aus der Kenntnis einiger Eigenschaften der Produktzerlegung auf andere Eigenschaften der Funktion, z. B. auf die Existenz unendlichvieler imaginärer Nullstellen zu schließen***).

---

*) Die ersten Koeffizienten von $\frac{1}{\Gamma(x)}$, $\frac{1}{x(x+1)\Gamma(x)}$, $\frac{1}{e^{cx}x(x+1)\Gamma(x)}$ sind berechnet bei *Bourguet*, Sur les intégrales Eulériennes etc. Acta Mathematica Bd. 2 (1883), S. 261—295.

**) Vgl. *Laguerre*, a. a. O. p. 22—25. — *Fekete* und *Pólya*, Über ein Problem von *Laguerre*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 34 (1912, 2), p. 119—120. — *Bálint*, Über reelle Wurzeln von Potenzreihen mit reellen Koeffizienten (Ungarisch), Mathematikai és természettudományi Értesitö, Bd. 31 (1913).

***) Ein solcher Schluß gelang Herrn *M. Riesz* bei einer von ihm untersuchten Funktion.

Über einen Determinantensatz, in welchem das Multiplikationstheorem als besonderer Fall enthalten ist.

Von Herrn *Karl Boehm* in Königsberg i. Pr.

Durch das Studium der ungemein anregenden vektoranalytischen Schriften der Herren *Burali-Forti* und *Marcolongo**) bin ich auf einen Determinantensatz geführt worden, welcher von diesen Forschern für Determinanten zweiter und dritter Ordnung benutzt wird. Der allgemeine Satz ist mir in der Literatur noch nicht begegnet; ich erlaube mir deshalb, ihn hier mit kurzen aber ausreichenden Andeutungen über den Beweis mitzuteilen.

Es seien zwei Matrices von je n^2 Elementen gegeben:

$$X = |x_{ik}| \qquad [i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots n] \tag{1.}$$

und

$$A = |a_{ik}| \qquad [i = 1, 2, \ldots n;\ k = 1, 2, \ldots n], \tag{2.}$$

deren Komposition die Matrix

$$X' = |x'_{ik}| = |x_{ik}|\,|a_{ik}| \tag{3.}$$

liefert, so daß also x'_{ik} die Bedeutung hat

$$x'_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} x_{ih} a_{hk}. \tag{4.}$$

Die Matrix, welche entsteht, wenn wir in (1.) die Elemente der Zeilen $i_1, i_2, \ldots i_n$ durch die entsprechenden Elemente der Matrix (3.) ersetzen, werde bezeichnet mit

---

*) *Omografie vettoriali.* Torino 1909. — *Analyse vectorielle générale.* — I. — Transformations linéaires, Pavie 1912. — Für den vorliegenden Gegenstand vergleiche man im besonderen die Nummer 2 des erstgenannten und Nummer 8 des zweiten Werkes.

(5.) $$\bar{X}_{i_1, i_2, \dots i_m};$$

es ist also z. B.

(6.) $$\bar{X}_{1,2,\dots m} = \begin{Vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_{m1} & x'_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & x'_{mn} \\ x_{m+1,1} & x_{m+1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{m+1,n} \\ x_{m+2,1} & x_{m+2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{m+2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n,n} \end{Vmatrix},$$

und im besonderen

(7.) $$\bar{X}_{1,2,\dots n} = X'.$$

Für die Determinante der Matrix (5.) führen wir das Symbol

(8.) $$D_{i_1, i_2, \dots i_m}$$

ein, welchem wir, wo es nötig erscheint, den Charakter eines Funktionszeichens geben, indem wir, statt (8.), schreiben:

(8′.) $$D_{i_1, i_2, \dots i_m}(X, A).$$

Bedeutet E die Einheitsmatrix $|\varepsilon_{ik}|$, so ist

(9.) $$D_{i_1, i_2, \dots i_m}(E, A) = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_1 i_m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i_m i_1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_m i_m} \end{vmatrix}.$$

Die Summe

(10.) $$\Sigma D_{i_1, i_2, \dots i_m}(X, A),$$

erstreckt über alle $\binom{n}{m}$ *Kombinationen ohne Wiederholung zur m-ten Klasse*

(11.) $$i_1, i_2, \dots i_m$$

der Zahlen von 1 *bis n, unterscheidet sich von der Determinante*

(12.) $$|X| = |x_{ik}|$$

um den von den Elementen der Matrix (1.) *unabhängigen Faktor*

(13.) $$f_m(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_m} D_{i_1, i_2, \dots i_m}(E, A) = \sum_{i_1, i_2, \dots i_m} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_1 i_m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i_m i_1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{i_m i_m} \end{vmatrix},$$

was wir in der Formel

$$(14.)\quad \Sigma D_{i_1, i_2, \dots i_m}(X, A) = |X|\, \Sigma \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_m i_1} & \dots & a_{i_m i_m} \end{vmatrix}$$

zusammenfassen. —

Der Satz (14.), welcher für $m = n$ das Multiplikationstheorem

$$(15.)\qquad D_{1, 2, \dots n}(X, A) = |X'| = |X|\,|A|$$

als besonderen Fall umfaßt, läßt sich genau so wie dieses auf Grund der von *Kronecker* aufgestellten charakteristischen Eigenschaften einer Determinante beweisen. Man kann aber auch den allgemeinen Satz aus dem besonderen, d. h. aus dem Multiplikationstheorem ableiten, am einfachsten, wenn man die algebraischen Operationen mit Hülfe von Differentiationen umgeht, was hier noch angedeutet werden soll.

Wir benutzen für die Matrix, welche aus (2.) durch Addition einer variablen Größe u zu den Diagonalgliedern entsteht, das Symbol

$$(16.)\qquad \{a_{ik} + u\varepsilon_{ik}\} = A + uE$$

und bezeichnen dementsprechend ihre Determinante durch

$$(17.)\qquad |a_{ik} + u\varepsilon_{ik}| = |A + uE| = f_n(A + uE);$$

dann haben wir die beiden durch vollständige Induktion leicht zu beweisenden Beziehungen

$$(18.)\quad \frac{d^{n-m}}{du^{n-m}} |A + uE| = (n-m)!\, \Sigma \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} + u & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_m} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} + u & \dots & a_{i_2 i_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \dots & a_{i_m i_m} + u \end{vmatrix}$$

$$= (n-m)!\, f_m(A + uE) \text{ und}$$

$$(19.)\quad \frac{d^{n-m}}{du^{n-m}} [D_{1, 2, \dots n}(X, A + uE)] = (n-m)!\, \Sigma D_{i_1, i_2, \dots i_m}(X, A + uE),$$

wobei auf den rechten Seiten wieder über sämtliche Kombinationen $i_1, i_2, \dots i_m$ zu summieren ist.

Gemäß (15.) besteht nun für beliebiges u die Identität

$$(20.)\qquad D_{1, 2, \dots n}(X, A + uE) = |X|\,|A + uE|.$$

Wenn wir diese $(n - m)$-mal nach u differenzieren und hierauf $u = 0$ setzen, so erhalten wir den Satz (14.). —

Es soll zum Schluß die Entwickelung der Funktion $f_m(A + uE)$ nach Potenzen von u angegeben werden. Aus (18.) erhält man die Beziehung

$$(21.) \qquad \frac{d}{du} f_m(A+uE) = (n-m+1) f_{m-1}(A+uE),$$

deren wiederholte Anwendung zu der folgenden Formel führt:

$$(22.) \qquad \frac{1}{r!}\frac{d^r}{du^r} f_m(A+uE) = \binom{n-m+r}{r} f_{m-r}(A+uE),$$

worin r zunächst die Werte $1, 2, \ldots m-1$ durchlaufen darf, aber auch den Wert m annehmen kann, wenn festgesetzt wird, daß das Symbol f_0, mit einer beliebigen Matrix als Argument, die Zahl 1 bedeuten soll. Es ist also

$$(23.) \qquad \frac{1}{m!}\frac{d^m}{du^m}[f_m(A+uE)] = \binom{n}{m}.$$

Nach diesen Vorbereitungen liefert die *Taylor*sche Entwickelung sofort das Resultat

$$f_m(A+uE) = f_m(A) + \binom{n-m+1}{1} f_{m-1}(A)\,u + \binom{n-m+2}{2} f_{m-2}(A)\,u^2 + \cdots + \binom{n-1}{m-1} f_1(A)\,u^{m-1} + \binom{n}{m} u^m. \quad —$$

Zur Theorie der quadratischen Reste.

Von Herrn *L. v. Grosschmid* in Budapest.

Wir wollen hier einen völlig elementaren Satz mitteilen, der uns neu erschien, und der sich auf eine Korrelation bezieht, welche zwischen den Faktoren der in einer bestimmten arithmetischen Reihe auftretenden *zusammengesetzten* Zahlen und denjenigen Stellen des Restsystems modulo einer Primzahl obwaltet, an welchen der quadratische Restcharakter in bezug auf diese Primzahl sich nicht ändert, falls man zu dem nächstfolgenden Charakter hinübergeht.

Auf Grund dieses Zusammenhanges hat man dann einerseits unmittelbar eine Methode, um die quadratische Charakterfolge modulo einer Primzahl hinzuschreiben, die auch praktisch verwendbar sein kann; andererseits eine bestimmte Vorschrift zur vollständigen Lösung der Kongruenz:

$$x(x+1) \equiv y^2 \pmod{p},$$

worin also alle bitrigonalen Reste gesucht werden, die zugleich quadratische Reste mod. p sind*).

Unser Satz lautet:

Ist $p > 1$ eine ungerade Primzahl und bildet man für jede der Zahlen $n \cdot 2p - 1$, während n die Werte $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$ durchläuft, alle möglichen Zerlegungen

$$p_1 \cdot p_2 = n \cdot 2p - 1$$

mit der Bedingung**)

$$(\text{I.}) \qquad (p_1^2 - 1)(p_2^2 - 1) \neq 0,$$

---

*) Zur literarischen Orientierung s. die einschl. Kapitel in *Bachmanns* Niedere Zahlentheorie I. Teil.

**) Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit dem Ausschließen aller Primzahlen, die unter den betrachteten $n \cdot 2p - 1$ vorkommen.

so geben die Zahlen

$$\frac{p_1-1}{2}\cdot\frac{p_2+1}{2} \pmod{p},$$

alle und *nur diejenigen Zahlen* t — einige eventuell auch öfters — der Reihe $1, 2, 3, \ldots p-2$, für welche

$$\left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t+1}{p}\right)$$

ist. Hier bedeutet $\left(\frac{t}{p}\right)$ das *Legendre*sche Symbol*).

Die Zahlen p_1, p_2 liefern wirklich Zahlen t der verlangten Art. Denn es ist:

$$p_1 \cdot p_2 \equiv -1 \pmod{p},$$

woraus, indem man $\alpha \equiv \frac{1}{2}(p_1-1)$, $\beta \equiv \frac{1}{2}(p_2+1) \pmod{p}$ setzt,

$$(\text{II.}) \qquad [\beta(\alpha+1)]^2 \equiv \alpha\beta(\alpha\beta+1) \pmod{p}$$

folgt, welche Kongruenz die gewünschte Eigenschaft von

$$t \equiv \alpha\cdot\beta \pmod{p}$$

aufweist. Man sieht ohne Mühe, daß weder $\alpha\beta$ noch $\alpha\beta+1 \equiv 0 \bmod p$ sein kann; denn nach (II.) würde folgen, entweder:

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \text{oder} \qquad \alpha \equiv -1 \pmod{p},$$

welche Kongruenzen mit den Annahmen nicht vereinbar sind. Nämlich aus der ersteren bekäme man:

$$p_2 = 2kp-1,\ p_1 = 2hp+1,$$

wo, nach (I.), $kh \neq 0$ ist, das heißt**):

$$|p_1p_2| \geqq (2p-1)^2 > p^2-(p-1);$$

während, laut $|n| \leqq \frac{1}{2}(p-1)$,

$$|p_1p_2| \leqq 2|n|p+1 \leqq p^2-(p-1)$$

gefunden wird. Zum selben Widerspruche führt $\alpha \equiv -1 \pmod{p}$.

Nun auch umgekehrt; ist

$$t(t+1) \equiv \text{quadr. Rest} \pmod{p},$$

so kann man die ganze Zahl n so bestimmen, daß die Zahl $n\cdot 2p-1$ eine Zerlegung $p_1\cdot p_2$ zuläßt, für welche

$$\tfrac{1}{2}(p_1-1)\tfrac{1}{2}(p_2+1) \equiv t \pmod{p}$$

---

*) Ein vollkommen analoger Satz gilt für die Zahlen $p_1p_2 = n\cdot 2p+1$, mit dem Unterschiede, daß hier $\frac{1}{4}(p_1-1)(p_2-1)$ oder aber $\frac{1}{4}(p_1+1)(p_2+1)$ zu betrachten sind, und für diese $\left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t-1}{p}\right)$ ausfällt.

**) $|a|$ bezeichnet den absoluten Wert von a.

ausfällt. Denn man sucht zuerst zwei Zahlen α, β, für die

$$(1.) \qquad \alpha\beta \equiv t \pmod{p},$$

$$(2.) \qquad (2\alpha+1)(2\beta-1) \equiv -1 \pmod{2p}$$

gilt. Man findet:

$$\beta \equiv \alpha - 2t \pmod{p}, \quad \text{also nach (1.)}$$

$$(3.) \qquad (\alpha - t)^2 \equiv t(t+1) \pmod{p}.$$

(3.) ist lößbar, da $t(t+1)$ Rest von p ist. Ist x_1 eine Lösung, so setze man

$$(a.) \qquad \alpha \equiv t + x_1 \pmod{p},$$

womit β den Wert

$$(b.) \qquad \beta \equiv -t + x_1 \pmod{p}$$

erhält. Diese Werte von α, β erfüllen (1.) und (2.). Ist nun $2\alpha+1 = p_1$, $2\beta-1 = p_2$, so hat man nach (2.):

$$n = \frac{p_1 p_2 + 1}{2p}, \quad \text{während nach (1.)}$$

$$\tfrac{1}{2}(p_1 - 1) \cdot \tfrac{1}{2}(p_2 + 1) \equiv t \pmod{p}$$

erfüllt ist. Was endlich die Grenzen von n betrifft, so sieht man aus (a.) und (b.), daß $|\alpha| \leqq \frac{1}{2}(p-1)$ und $|\beta| \leqq \frac{1}{2}(p-1)$ angenommen werden können; also:

$$|n|2p - 1 \leqq |n \cdot 2p - 1| = |p_1 p_2| \leqq (2|\alpha|+1)(2|\beta|+1) \leqq p^2, \text{ oder}$$

$$|n| \leqq \frac{p-1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}\right), \text{ woraus folgt:}$$

$$|n| \leqq \tfrac{1}{2}(p-1),$$

was wir zeigen wollten. Dadurch ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Einige Bemerkungen mögen hier noch Platz finden.

Vertauscht man in den früheren Formeln p_1 mit p_2, so bekommt man ein neues Paar α', β':

$$\alpha' \equiv \tfrac{1}{2}(p_2 - 1), \quad \beta' \equiv \tfrac{1}{2}(p_1 + 1) \pmod{p}.$$

Man sieht aber sofort, daß dieses Paar im wesentlichen nichts neues liefert, da $\alpha'\beta' \equiv -(\alpha\beta+1)$, also auch $\alpha'\beta'+1 \equiv -\alpha\beta \pmod{p}$ gefunden wird*). Die ganze Vertauschung läuft auf die Substitution $t \equiv -t' - 1 \pmod{p}$ hinaus, nach welcher $t'(t'+1) \equiv t(t+1) \pmod{p}$ hervorgeht**).

---

*) Dies erhellt aus der Identität: $(p_1+1)(p_2-1) + (p_1-1)(p_2+1) \equiv -4 \pmod{p}$.

**) Nimmt man in (a.) $-x_1$ statt x_1, so wird:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &\equiv t - x_1 \equiv -(-t + x_1) \equiv -\beta \\ \beta' &\equiv -(t + x_1) \equiv -\alpha \end{aligned}\right\} \pmod{p},$$

und

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= 2\alpha' + 1 \equiv -(2\beta - 1) = -p_2 \\ p_2' &= 2\beta' - 1 \equiv -(2\alpha + 1) = -p_1 \end{aligned}\right\} \pmod{p}.$$

Der in Rede stehende Satz gibt nun ein Mittel, für das ganze Restsystem $1, 2, \ldots p-1$ die Charakterfolge: $\left(\frac{1}{p}\right), \left(\frac{2}{p}\right), \ldots \left(\frac{p-1}{p}\right)$ hinzuschreiben. In der Tat, laut dem Satze kennt man diejenigen Teilserien des Restsystems, deren aufeinanderfolgende Zahlen alle denselben quadratischen Charakter mod. p besitzen. Für die Einheit hat man immer $\left(\frac{1}{p}\right) = +1$, während für die Zahlenfolgen, deren Individuen nicht durch den Satz geliefert werden, das Charakterbild: $\epsilon, -\epsilon, \epsilon, -\epsilon, \ldots$, wo ϵ gleich $+1$ oder -1 ist, gesetzt werden muß. Das Verfahren wird vielleicht durch ein Zahlenbeispiel deutlicher gemacht.

Nehmen wir $p = 19$. Die Zahlen $n \cdot 2p - 1$ $(n = -9, -8, \ldots 9)$ liefern hier folgende t-Werte*):

$$4, 14;\ 2, 16;\ 5, 13;\ 6, 12;$$

demnach hat man die Tabelle:

quadratische	Reste:	1,		4,	5,	6,	7,	9,	11,					16,	17,		
	Nichtreste:	2,	3,				8,	10,		12,	13,	14,	15,			18,	

deren Richtigkeit durch bekannte Methoden leicht zu kontrollieren ist.

---

*) Die Rechnung kann verschiedenartig abgekürzt werden. Eine frühere Bemerkung ermöglicht z. B. die Zerlegungen $p_1 p_2, p_2 p_1$ nicht getrennt zu behandeln. Setzt man außerdem $\frac{1}{2}(a-1)\frac{1}{2}(b+1) = (a, b)$, so findet man unmittelbar: $(-a, b) = (-b, a)$, $(b, -a) = (a, -b) \equiv -[(-a, b) + 1]$ (mod. p), d. h. die vier t-Werte: $(a, -b), (b, -a), (-a, b), (-b, a)$ ergeben sich aus irgend einem von ihnen. Bemerkt man endlich, daß — infolge eines *Lagrange*schen Lemmas (*Serret*, Cours d' Alg. sup., t. II., Ed. 6., Art. 329) — die Anzahl aller t-Werte mod. p gleich $\frac{1}{2}(p-3)$ ist, so hat man die Rechnung beendet, sobald man $\frac{1}{2}(p-3)$ mod. p verschiedene t-Werte gefunden hat.

JUN 5 1915
UNIV. OF MICH.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 145.

Heft 4.

Ausgegeben den 1. Mai

Berlin W. 10

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1915.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Jeder Band 16 Mark.

Hierzu eine Beilage

Band 145. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Koebe, P., Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I. (Schluß) Seite 201

Pólya, G., Algebraische Untersuchungen über ganze Funktionen vom Geschlechte Null und Eins . . . . . — 224

Boehm, K., Über einen Determinantensatz, in welchem das Multiplikationstheorem als besonderer Fall enthalten ist . . . . . — 250

Grosschmid, L. v., Zur Theorie der quadratischen Reste . . . . . — 254

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

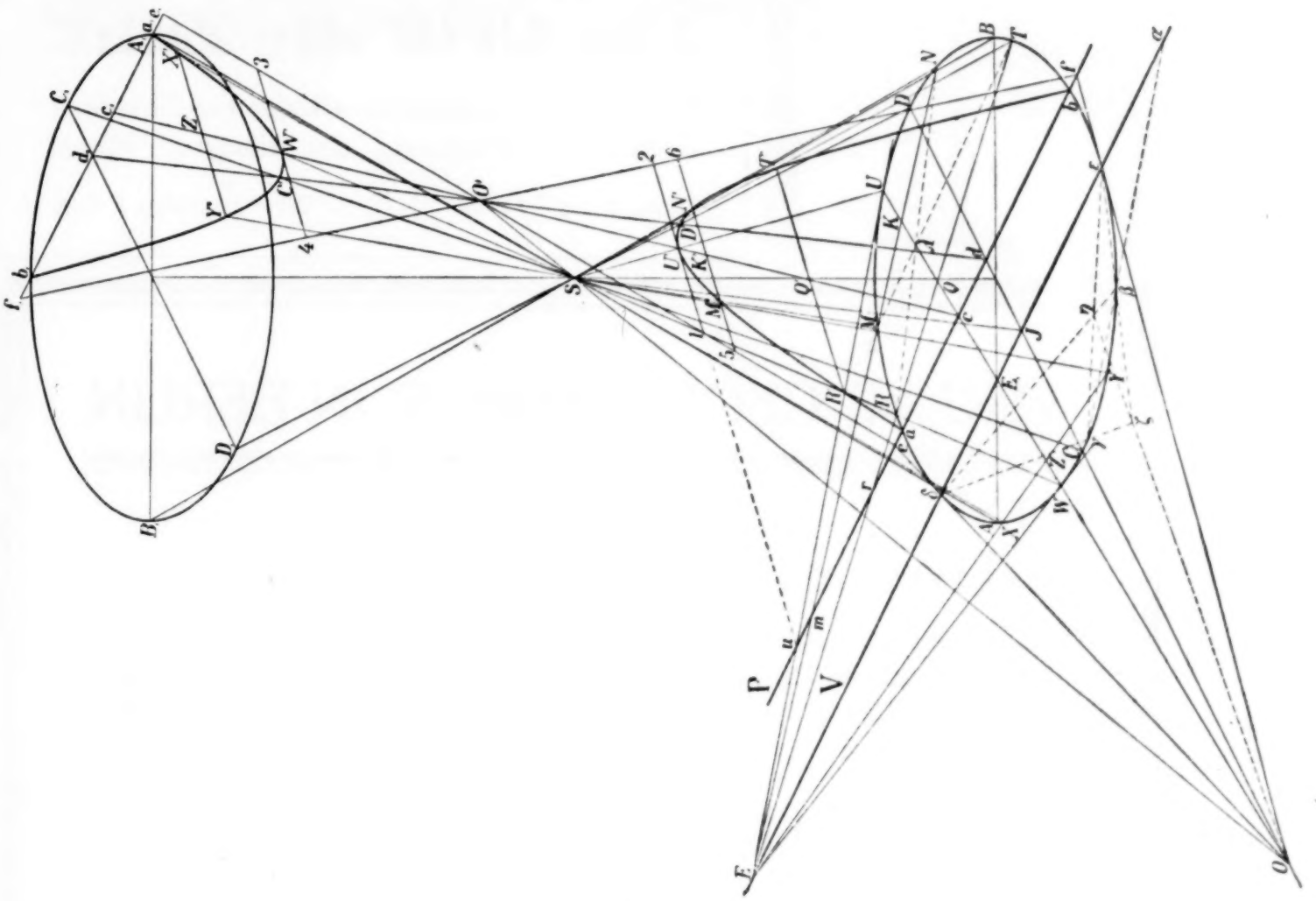
WANDTAFELN ZUM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

GEZEICHNET VON **A. SCHULTE-TIGGES**

1

Ellipse und Parabel

als Zentralprojektionen des Kreises.

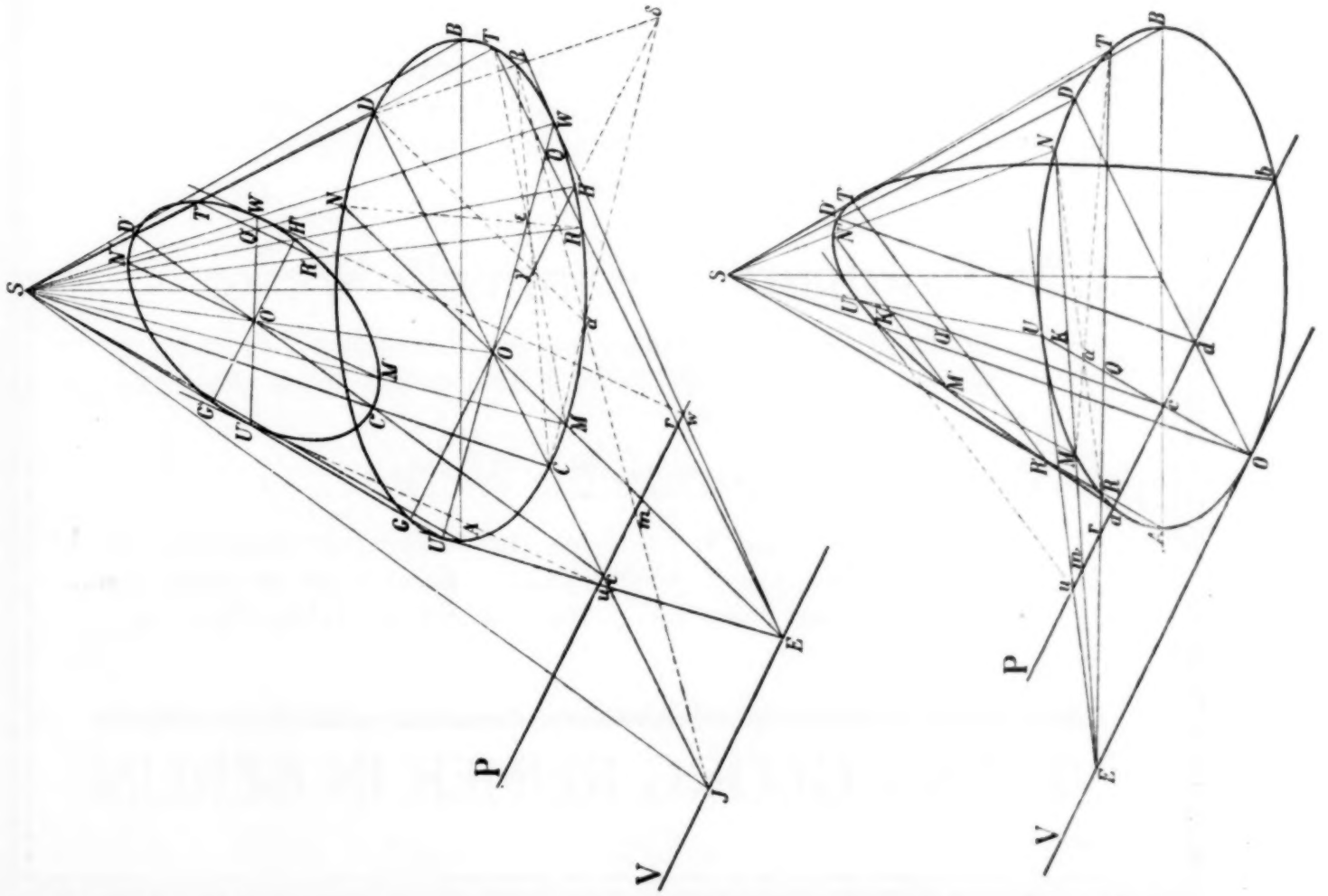


2

Die Hyperbel

als Zentralprojektion des Kreises.

(Verkleinerte Abbildungen)



Die zweifarbigen Wandtafeln, Format 95 × 130 cm, sind auf Leinenpapier gedruckt und mit Stäben versehen.
Preis jeder Tafel 10 Mark